ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

Гиперболический параболоид

1990

Квант

1990

3

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Москва. «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

О ЧЕМ НЕ ДУМАЕТ ГОРНОЛЫЖНИК

Кандидат физико-математических наук
А. АБРИКОСОВ

В мире зимних видов спорта горные лыжи, санки и бобслей стоят как бы особняком. Когда наблюдаешь такие спортивные состязания только по телевизору, возникает некоторое недоумение: можно ли вообще соревноваться, кто быстрее съедет с горки? и не является ли разброс результатов простой случайностью? Ведь все мы решали задачу о скатывании тела с наклонной плоскости (рис. 1). Система уравнений, описывающих это движение, позволяет найти ускорение тела на начальном участке, скорость установившегося движения, время движения по трассе от старта до финиша. Тут и возникает парадокс, оправдывающий недоумение телеболельщика: результаты не зависят от поведения спортсмена. Но ведь мы и не пытались учесть этот фактор в исходных уравнениях. А если попытаться?

Сразу приходит в голову обратить внимание на силу трения и силу сопротивления воздуха. Коэффициент трения связан с выбором мази. Для саночников и лыжников-спусковиков (да и гигантистов тоже) нельзя недооценивать роль аэродинамики. Важно не только принять и сохранить правильную стойку, но и подобрать материал и хорошо сшить из него комбинезон. Примером может служить легендарная победа французской сборной команды в скоростном спуске. Французы первыми поняли, что трепещущий нагрудный номер — это недопустимая роскошь при скорости 100 км/ч. Под градом шуток они приклеили номера к костюмам пластырем. И повеселились на финише. Ныне в погоне за сотыми долями секунды даже конькобежцы надели «сверхобтекаемые» комбинезоны, а лыжников порой обдувают в аэродинамических трубах. Изогнутые палки позволяют принять более выгодную стойку. Испытываются новые мази и покрытия для лыж, сплавы для саночных полозьев. Описанное Л. Кассилем в книге «Ход белой королевы» похищение лыжной мази кажется невинной забавой, когда идет борьба за олимпийское золото.

Но вот экипировка участников более-менее равноценна, и на первый план выходят индивидуальные качества спортсмена — воля к победе, физическая и специальная подготовка. Мы расскажем, как законы механики позволяют применить свои физические данные и обратить волю к победе в драгоценные секунды результата. Чтобы понять основы лыжной техники, давайте отвлечемся от скоростного спуска (где так важны аэродинамика, умение правильно вести лыжи и удачно выбрать траекторию) и перейдем к слаломным дисциплинам. Здесь спортсменам приходится бороться за успех своими силами, проявляя временами акробатическую ловкость.

Трасса глазами лыжника

Вернемся к силам, которые действуют на лыжника на трассе. Мы, зрители, видим спортсмена в инерциальной системе отсчета, связанной со склоном или с телекамерой. Ну а для лыжника более естественна неинерциальная система, связанная с ним самим. Для вычислений она не очень удобна, но все-таки попробуем взглянуть на трассу глазами лыжника.

Будем предполагать, что речь идет о равномерном скольжении по окружности. В связанной с лыжником системе отсчета наряду с реальными силами (силы тяжести, трения, реакции опоры, сопротивления воздуха) нужно ввести центробежную силу инерции $F_{цб}$, направленную от центра дуги и равную

$$F_{цб}=mv^2/R,$$

где v — скорость лыжника, R — радиус дуги (рис. 2). Центр тяжести лыжника в этой системе неподвижен; значит, в любой момент времени равнодействующая приложенных сил равна нулю. Поэтому сила реакции снега должна быть направлена к центру дуги — ведь это единственная сила, которая может скомпенсировать $F_{цб}$. У саночников это обеспечивается наклоном желоба. А у лыж для лучшего сцепления со снегом скользящая поверхность имеет металлические канты, и при повороте лыжи «кантуют» — спортсмен наклоняет лыжи «на ребро», так, чтобы они зацепились за снег металлическими кантами — как коньки. Горизонтальная компонента силы реакции снега сообщает спортсмену центростремительное (в инерциальной системе отсчета) ускорение. Чтобы уверенно чувствовать себя на жестких и льдистых склонах, канты нужно регулярно точить, особенно перед соревнованиями.

А кстати, какие нагрузки испытывает спортсмен? Давайте прикинем. Средняя скорость слаломиста около 10 м/с при радиусе дуги порядка 5 м, и $F_{цб}=mv^2/R\approx m\ \ 20\cdot\text{м/с}^2$, т. е. равна примерно удвоенному весу лыжника. Эту силу нужно векторно сложить с перпендикулярной склону составляющей силы тяжести $mg\cos\alpha$ (обычно $\alpha<30°$, $\cos\alpha>1/2$). Так что суммарная перегрузка превышает $2g$, причем падает она в основном на «внешнюю» ногу (попытка встать на внутреннюю лыжу, как правило, заканчивается падением). Ну а по характеру своему нагрузка весьма напоминает испытание на вибростенде. Поэтому спортсмены-горнолыжники даже летом занимаются общей физической подготовкой. Например, приседают со штангой.

Оптимальная траектория ±10 см

Теперь мы начинаем «раскладывать» успех на отдельные слагаемые. Почему лыжника, скатывающегося с горы, нельзя уподобить, скажем, бусинке, соскальзывающей по гладкой изогну-

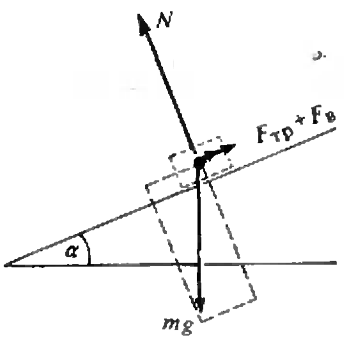


Рис. 1. Тело на наклонной плоскости: mg — сила тяжести, N — сила реакции опоры, $F_{тр}$ и $F_в$ — силы трения и сопротивления воздуха. Уравнение движения тела —

$$m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{тр}+\vec{F}_в.$$

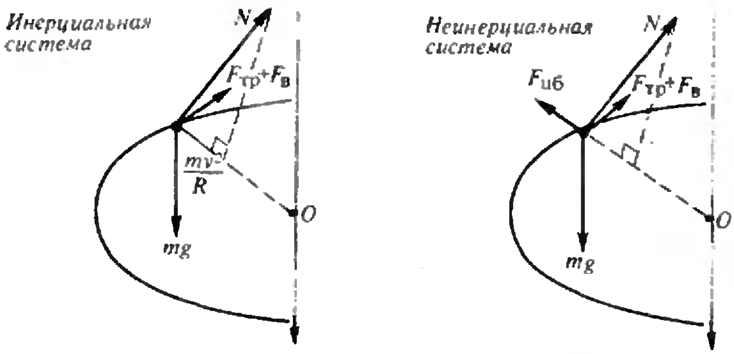


Рис. 2. Инерциальная и неинерциальная системы отсчета. В неинерциальной системе на лыжника действует центробежная сила инерции.
Здесь и далее на рисунках голубая прямая со стрелкой обозначает линию склона.

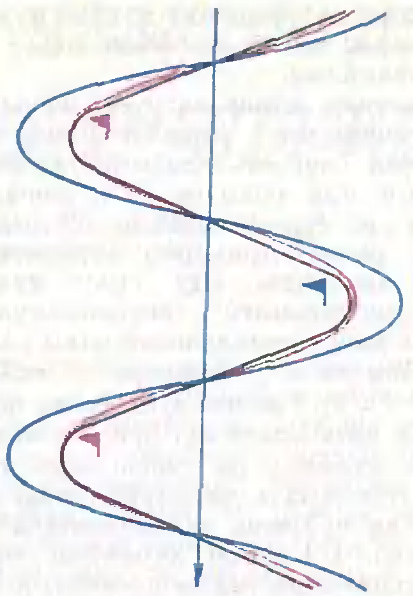


Рис. 3. Варианты выбора маршрута на трассе слалома. Красная кривая — оптимальная траектория.

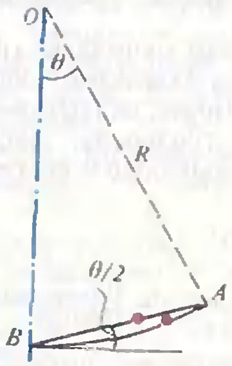


Рис. 4. Бусинки на проволочках. Время соскальзывания по дуге AB меньше, чем по стягивающей ее хорде.

той проволоке? В первую очередь потому, что он сам выбирает маршрут движения в коридоре, заданном флагами (у саночников — желобом). Говоря научным языком, склон горы представляет собой двумерное пространство, где спортсмену (даже если считать его материальной точкой) предстоит найти оптимальную траекторию, в то время как движение бусинки чисто одномерное.*)

Вид оптимальной траектории определяется сочетанием целого ряда факторов. Прежде всего, желательно пройти трассу кратчайшим путем, как можно меньше уклоняясь от линии склона (рис. 3). При этом мы выигрываем не только из-за сокращения расстояния, но и за счет увеличения средней крутизны маршрута — чем круче склон, тем больше скатывающая сила и тем меньше сила трения. Поэтому слаломисты стараются идти как можно ближе к флагам, отбивая их плечом и корпусом.

Можно оценить потерю времени вследствие удлинения пути. Пусть отклонение от оптимальной кривой составляет всего лишь ± 10 см. Того же порядка будет удлинение каждой из образующих ее дуг. На слаломной трассе из 50 ворот при средней скорости 10 м/с проигрыш окажется вполне ощутимым:

$$\Delta t \approx (50 \cdot 0{,}1\ \text{м})/(10\ \text{м/с}) = 0{,}5\ \text{с}.$$

В то же время в скоростном спуске или слаломе-гиганте, где ворот меньше, а средняя скорость больше, этот фактор скажется незначительно.

Однако, как ни странно, «идти на флаг», т. е. спрямлять участки пути между флагами, также невыгодно. Во-первых, при этом придется сбрасывать скорость, чтобы вписаться в более крутой поворот, а во-вторых, время движения по прямой вовсе не обязательно наименьшее.

Рассмотрим простой пример. Бусинка скатывается без начальной скорости из точки A в точку B сначала по дуге окружности, а затем по стягивающей ее хорде (рис. 4). Если угловой размер дуги мал, то время движения в первом случае равно четверти периода колебаний математического маятника длиной R (трением пренебрегаем):

$$T_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{R/g}.$$

*) В каком-то смысле «самым одномерным» является бобслей, где очень многое зависит от умения экипажа разогнать снаряд на старте.

Длина хорды равна $l=2R\sin(\theta/2)$, бусинка движется с ускорением $a=g\sin(\theta/2)$, и во втором случае время будет

$$T_2=\sqrt{2l/a}=2\sqrt{R/g}.$$

Отношение $T_1/T_2=\pi/4<1$, т. е. по дуге бусинка скатится быстрее. Никакого чуда здесь нет. Хотя путь вдоль дуги длиннее, он начинается с более крутого участка. Бусинка быстрее разгоняется, и выигрыш в скорости оказывается важнее, чем проигрыш в расстоянии. С этой точки зрения траектория, составленная из плавно сопряженных дуг, также оказывается лучше, чем та, где резкие повороты перемежаются спрямленными участками.

Еще Галилей интересовался формой брахистохроны — линии наискорейшего спуска от одной точки к другой. Он считал, что это дуга окружности (как в рассмотренном нами примере). В 1697 году И. Бернулли показал, что в отсутствие трения это другая магическая кривая — циклоида.

Уравнение брахистохроны используют при проектировании санных трасс и «американских» (они же «русские») горок. Но рассчитать, не выходя из кабинета, оптимальный путь лыжника не удается. Спортсменам приходится полагаться на собственную интуицию, опыт, тщательно запоминать расположение флагов на трассе. И, следуя совету замечательного французского горнолыжника Ж.-К. Килли, «думать на пять ворот вперед».

Механизм торможения, или Что такое хорошие лыжи

В горных лыжах, да и во многих других видах спорта, прогресс и развитие техники спортсменов идут бок о бок с совершенствованием инвентаря. Как до появления фиберглассовых шестов нельзя было и мечтать о шестиметровых прыжках, так едва ли можно было вообразить стиль нынешних лыжников, стоя на трофейных гикоревых лыжах с креплениями «Кандахар».

Для того чтобы «быстро бегать», лыжи должны не только хорошо скользить, но и как можно крепче держаться за склон, не соскальзывать в поперечном направлении. Действительно, из формулы для центробежной силы видно, что скорость, с которой можно пройти вираж, пропорциональна квадратному корню из силы F поперечного сцепления лыж со снегом —

$$v=\sqrt{FR/m}.$$

Однако дело не только в этом. Соскальзывание является основной причиной потери скорости (драгоценная энергия расходуется на «сгребание» снега со склона). Обычно лыжники пользуются боковым соскальзыванием, когда нужно погасить скорость, преодолеть крутой участок, где новичок не надеется на свои силы, или просто загладить склон после тренировки. Но если спортсмена «потащило на повороте», это сразу же зафиксирует секундомер. Отсюда стремление поставить лыжу как можно круче к склону и врезаться кантами в снег. (А на открывающейся при этом скользящей поверхности особенно эффектно выглядит реклама лыжной фирмы. Правда, появилась она там совсем недавно.)

У истоков развития горных лыж стоял Ф. Нансен. Великий полярник, политический деятель, лауреат Нобелевской премии мира был также автором первой книги о горных лыжах.

Во времена Нансена катались в мягких кожаных ботинках на жестких неокантованных лыжах. А первым собственно горнолыжным приемом был «телемарк» (рис. 5). Этот красивый поворот требовал ловкости и был чреват падением.

На смену «телемарку» пришел более демократичный «плуг» (рис. 6). По сей день многие лыжники начинают с него свою карьеру. Это самый простой, но, увы, самый медленный способ.

Рис. 5. «Телемарк». Лыжник делает выпад вперед внешней лыжей и балансирует руками. Современное снаряжение не позволяет поворачивать таким образом.

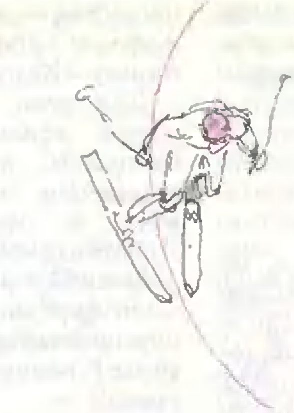


Рис. 6. «Плуг». Стоя на внутренней лыже, лыжник «упирается» в снег отставленной внешней.

Рис. 7. «Христиания» соскальзыванием. Параллельные лыжи заметают меньшую площадь, чем при «плуге», поэтому торможение меньше.

Последнее слово осталось за «христианией» — поворотом на параллельных лыжах. Постепенно совершенствуясь, он прочно занял главное место в техническом арсенале горнолыжника. Сначала «христианию» выполняли соскальзыванием (рис. 7). Внутренняя лыжа разгружена, корпус лыжника подан чуть вперед, поэтому носок сильнее «держится» за снег. В ходе движения задники немного соскальзывают, и получается поворот. Такой способ был быстрее и надежнее предшествующих.

А дальше уже сама собой, просто и естественно напрашивается идея «резаного» поворота (рис. 8), при котором сопротивление движению минимально. Выросли скорости, и требования к снаряжению сменились на прямо противоположные. Теперь делают жесткие и высокие пластиковые ботинки, которые передают усилие прямо от голени к лыже и позволяют хорошо ее закантовать. А сама лыжа — мягкая, она изгибается по дуге и выписывает поворот, оставляя узкий «резаный» след. Чтобы лыжа легко принимала форму дуги, в середине, где давит ботинок, ее делают немного уже, чем с концов (рис. 9). При кантовании сцепление со снегом оказывается максимальным на концах, и давление посередине прогибает лыжу нужным образом.

Сделать хорошие лыжи непросто, ведь надо убить по крайней мере двух зайцев. Во-первых, лыжа должна мягко гнуться по дуге в продольном направлении. Во-вторых, чтобы не соскальзывать, она должна быть жесткой «на пропеллер», т. е. противостоять скручиванию. Не говоря уж о том, что лыжа должна держать направление и не гнуться в плоскости склона («саблевидный изгиб»). Найти удачное сочетание хотя бы этих качеств — сложная конструкторская задача, причем выбор конкретного решения неоднозначен. Для слалома, где виражи круче, а скорости меньше, спортсмены берут лыжи короче и податливее, чем для слалома-гиганта. Свои требования предъявляют метеоусловия и качество снега. Поэтому буквально перед самым стартом решает будущий чемпион, какие из подготовленных накануне лыж послужат ему сегодня.

К счастью, любители не знают таких проблем. Скорее наоборот, ведь спортивный инвентарь зачастую «строг» и не прощает мелких огрехов. Так что те отборные лыжи, которые мы видим по телевизору,— это лишь верхушка айсберга. А мил-

Рис. 8. «Резаный» поворот. Лыжи прогнулись и не «сгребают» снег: в этом случае торможение минимально.

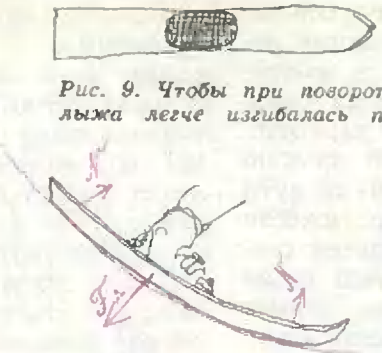


Рис. 9. Чтобы при повороте лыжа легче изгибалась по дуге, у нее делают «талию» — небольшое сужение в середине. При кантовании давление ботинка прогнет лыжу нужным образом.

лионы более комфортных туристских лыж верно служат многочисленным любителям и «фанатам» — тем, на кого опирается большой спорт.

Поворот с ускорением, или Фокусы на кривой дорожке

Наконец мы переходим к важнейшему элементу, без которого немыслима техника современного слалома и слалома-гиганта. Несмотря на ясность лежащих в основе физических принципов, этот раздел может вызвать разногласия. До сих пор некоторые специалисты не верят, что спортсмен может ускорять себя при спуске с горы, хотя кинограммы движения хороших лыжников доказывают это. Какие возможности таит активное ведение лыж, показал еще в самом начале своего фантастического взлета Ингемар Стенмарк. «Шведский ураган» опережал соперников больше чем на секунду, в то время как борьба шла за десятые.

Горнолыжников, пожалуй, может удивить непривычный взгляд на данное им в ощущениях. Ни в коем случае не посягая на личный опыт читателей, мы лишь предлагаем свою точку зрения на объективную реальность.

Давайте оглянемся, не подскажут ли разгадку горнолыжного ускорения другие виды спорта? Скажем, обычные беговые лыжи... Теперь здесь правит коньковый ход (рис. 10, *а*). Благодаря ему выросли скорости. Не перенять ли опыт слаломистам? Идея не новая. Ход «коньком» был опробован именно в горных лыжах, а уже потом спустился на равнину. На склоне это выглядит так: каждый поворот сопрягается с одним отталкиванием внешней лыжей, и следы слегка расходятся от начала к концу дуги (рис. 10, *б*). Казалось бы, возникает выигрыш в скорости, но за него приходится платить. Во-первых, «конек» требует очень точ-

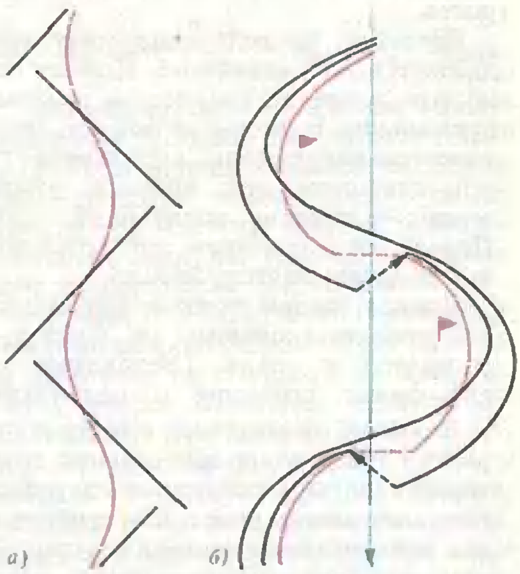


Рис. 10. Коньковый ход на ровном месте (а) и на склоне (б). Красные кривые — траектории центра тяжести лыжника, черные — следы лыж.

ной координации работы ног и соблюдения равновесия, когда лыжник загружает внутреннюю ногу. А во-вторых, затягивается переход из поворота в поворот. В точках пересечения траектории с линией склона спортсмен «перекладывается» из дуги в дугу, перенося свой центр тяжести над лыжами. Затем начинается следующий поворот. Если лыжи стоят широко, то перекладывание займет больше времени, вырастет спрямленный участок траектории. Кроме того, лыжи дольше будут не закантованы, проскальзывание приведет к торможению. Сильнее всего это заметно на льдистых трассах, где так трудно уцепиться за склон. Вот и получается, что на горе «конек» — не самая резвая лошадка...

Хорошо бы и ускоряться, и лыжи вести поуже! Возможно ли такое? Присмотримся еще раз к коньковому ходу (рис. 10, *а*). Центр тяжести конькобежца или лыжника-гонщика описывает волнообразную траекторию (красная линия на рисунке). Корпус спортсмена опережает опорную лыжу и движется под углом к ней. При этом (а не при переступании с ноги на ногу) совершается работа и набирается скорость.

Постойте, но ведь слаломист тоже движется по «змейке»! Причем его корпус вовсе не следует за лыжами буквально. В конце поворота центр тяжести спортсмена «догоняет» лыжи, проходит над ними и уходит вперед — внутрь следующей дуги. Нельзя ли дополнить это отталкиванием? Оказывается, можно.

Правда, такой толчок имеет мало сходства с «коньком» и совсем не бросается в глаза. Составляют его две фазы: сгибание и разгибание.

Вначале, при подходе к точке сопряжения дуг (к точке пересечения траектории с линией склона), когда корпус нагоняет лыжи, спортсмен сгибает ноги, словно «амортизируя» бугор. Такое сгибание (иногда очень резкое «проглатывание» — авальман) позволяет сохранить набранную скорость, избежать соскальзывания лыж. Сразу за точкой сопряжения следует

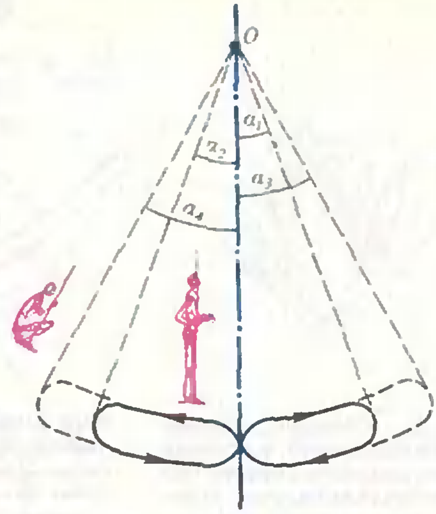


Рис. 11. Движение центра тяжести при раскачивании на качелях.

разгибание, которое выносит корпус чуть вперед, сообщая ему добавочный импульс по линии склона. К концу дуги лыжи снова опережают спортсмена, и следуют новые сгибание (амортизация) и разгибание (отталкивание). Причем на узко поставленных лыжах*).

Лучше понять физику такого, казалось бы, нехитрого процесса нам поможет известное совсем не зимнее развлечение.

Летние аналогии

Итак, давайте немного отвлечемся и вспомним, как летом мы раскачиваемся на качелях, больших парковых качелях-лодках. Представьте себе... Вот качели, постепенно замедляясь, летят наверх. В тот миг, когда они зависают в верхней точке, мы приседаем и вот уже мчимся вниз, так что ветер свистит в ушах.

*) Наблюдая за горнолыжниками, вы, возможно, замечали, что часто, сопрягая дуги, мастера делают как бы приставной шаг с лыжи на лыжу. Это не должно сбивать вас с толку. *Порой это продиктовано* спецификой трассы, а иногда... Даже великие иногда ошибаются.

Внизу, когда перегрузка максимальна, встаем и снова, с замиранием сердца,— наверх, уже чуть выше, чем в прошлый раз. Центр тяжести системы описывает при раскачивании восьмеркообразную спираль (рис. 11).

Раскачивание колебательной системы за счет изменения ее параметров (на качелях это расстояние от точки подвеса до центра тяжести) называется параметрическим резонансом. Вставая в нижней точке, мы совершаем положительную работу против суммы силы тяжести и центробежной силы инерции (мы рассматриваем движение в неинерциальной системе отсчета). А в верхней точке центробежная сила равна нулю, от силы тяжести остается лишь проекция $mg\cos\alpha$. Поэтому отрицательная работа при приседании (с той же амплитудой) по модулю меньше. Полная работа, совершенная за цикл, положительна, и энергия системы растет.

А теперь попробуем прикинуть энергетический баланс горнолыжника, как мы только что это сделали для качелей.

Здесь нас подстерегает сюрприз. На первый взгляд, все очень похоже. При движении по дуге на лыжника тоже действуют сила тяжести и центробежная сила инерции (рис. 12). Угол между ними меняется, так что их равнодействующая минимальна в начале дуги (F_{p1}) и достигает максимума в конце (F_{p2}). Приседая, лыжник совершает отрицательную работу, а вставая — положительную. Однако когда он разгибается в начале дуги, на него действует меньшая сила, чем при сгибании в конце. Значит, суммарная работа, совершаемая за цикл сгибания — разгибания (амортизация — толчок), будет отрицательна. Парадокс?! Казалось бы, гораздо естественнее совершать положительную работу и увеличивать кинетическую энергию.

Никакой ошибки здесь нет. Просто до сих пор мы не заботились особенно о балансе энергии и думали только о том, как сократить потери и выиграть скорость. В этой теоретической гонке за секундами немудрено было и перегнуть палку. Настало время поставить все на свои места. Давайте запишем закон сохранения энергии на каком-либо участке трассы:

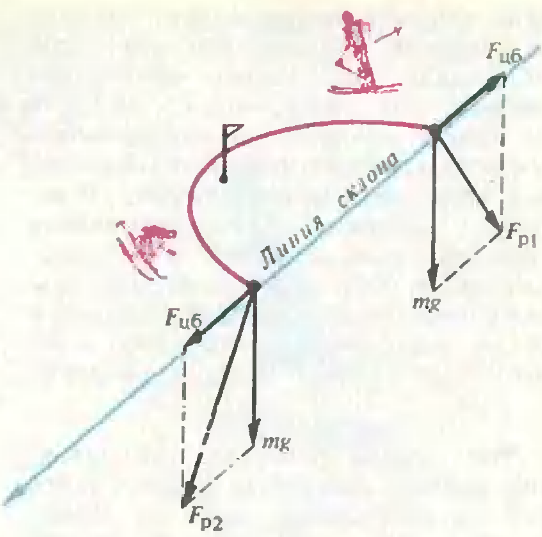


Рис. 12. Равнодействующие сил тяжести и центробежной в начале и в конце дуги: $F_{p2} > F_{p1}$.

$$\Delta E = mg\Delta h + \frac{\Delta(mv^2)}{2} = A_{тр} + A_{в} + A_{лыжн}.$$

В левой части — изменение потенциальной ($mg\Delta h$) и кинетической ($\Delta(mv^2)/2$) энергии лыжника, в правой — работа, совершаемая самим лыжником, силами трения и сопротивления воздуха. Каковы соотношения между этими слагаемыми?

Начнем с левой части уравнения. Средняя скорость слаломиста на трассе меняется не слишком сильно. Поэтому второе слагаемое едва ли существенно, т. е. $\Delta(mv^2/2) \approx 0$. А вот первое, наоборот, велико. Чтобы набрать обычную для слаломиста скорость $v \sim 10$ м/с, достаточно потерять всего лишь $\Delta h = v^2/2g = 5$ м высоты. (В больших горах перепады, как правило, исчисляются сотнями метров.)

Теперь о правой части. Торможение лыж при резаном повороте очень мало. Сопротивление воздуха зависит от скорости. Однако обе эти силы не мешают спусковикам превышать скорость 100 км/ч, т. е. 28 м/с. Но трасса слалома на такой скорости сливается в непробиваемый частокол, становится непроходимой*) И задача слаломиста — не увеличивать скорость, а по крайней мере сдерживать ее рост. Так что отрицательная работа, совершаемая лыжником в цикле сгибания — разгибания,— необходимое условие баланса энергии:

$$A_{\text{лыжн}} < 0.$$

Итак, чтобы выиграть, горнолыжник должен совершать работу, которая не становится легче от знака «минус». Законы физики подтверждают: за победу надо бороться!

Чем же такой способ понижения энергии выгоднее постепенного расхода при повороте соскальзыванием? Во-первых, заменой статических нагрузок на менее утомительные динамические. Нет нужды что есть силы упираться кантами в снег и терять в конце дуги набравшуюся скорость. А во-вторых, вспомним пример с двумя бусинками (см. рис. 4). Если энергия лыжника тратится на трение, его движение по дуге можно грубо представить себе равноускоренным, как у бусинки на прямой проволочке. А при повороте с ускорением лыжник сначала совершает работу и набирает скорость, а гасит ее излишек в конце дуги. В итоге средняя скорость больше, и на поворот уходит меньше времени (как у бусинки на дуге). Режим сгибания — разгибания оказывается дополнительным средством контроля скорости.

Свобода движений и уникальные динамические возможности отличают горные лыжи от санок и бобслея и роднят с молодой еще роликовой доской — «скейтбордом», или просто «скейтом». Кстати, вот прекрасный пример того, что ускоряться не обязательно «коньком»: куда шагнешь, если обе ноги стоят на одной доске? Тем не менее, ускорение за счет параметрического резонанса позволяет даже преодолевать на скейте небольшие подъемы. А механизм все тот же: корпус наклонен внутрь дуги, значит, разгибание в начале поворота и сгибание в конце дают суммарный импульс в направлении движения. И вас не должно смущать, что на скейте сгибание сопровождается энергичным скручиванием в пояснице, помогающим вести дугу. С точки зрения внешнего наблюдателя, главную роль играет перпендикулярная оси доски компонента силы трения (на лыжах это компонента силы реакции снега при кантовании). При движении по «змейке» она меняется по величине и по направлению, но в среднем направлена вперед.

Вот и весь секрет. Только не обольщайтесь, ведь наша теоретическая модель «сесть — встать на два счета» предельно упрощена. Учиться плавать надо в воде. И не было еще на свете лыжника, не измерившего собой пару-тройку больших сугробов.

Заключение

Ни с чем не сравнимое чувство удивительной свободы, когда весь мир рвется тебе навстречу, сверкая искрами морозного снега, не описать формулами. Маленькие дети учатся кататься, подражая взрослым, и не думают о физике. Но знание законов Ньютона открывает второй путь — от головы к ногам.*) Может быть, именно здесь горнолыжник найдет ответ на какие-то нерешенные вопросы. Ну а не горнолыжник... Неужели теперь, когда вы столько знаете, вам не захотелось попробовать? Право же, эта мечта достойна воплощения. Ведь даже если горные лыжи — это не счастье, они вполне могут заменить его.

*) Разумеется, на слаломной дуге трение лыж больше, чем на спуске, но не настолько, чтобы изменить последующий вывод.

*) А здесь есть еще о чем подумать. Например, о моментах сил, действующих на горнолыжника. Ведь мы даже не касались этой важнейшей, но сложной темы.

ПОГЛЯДИМ НА ДИАГРАММУ...

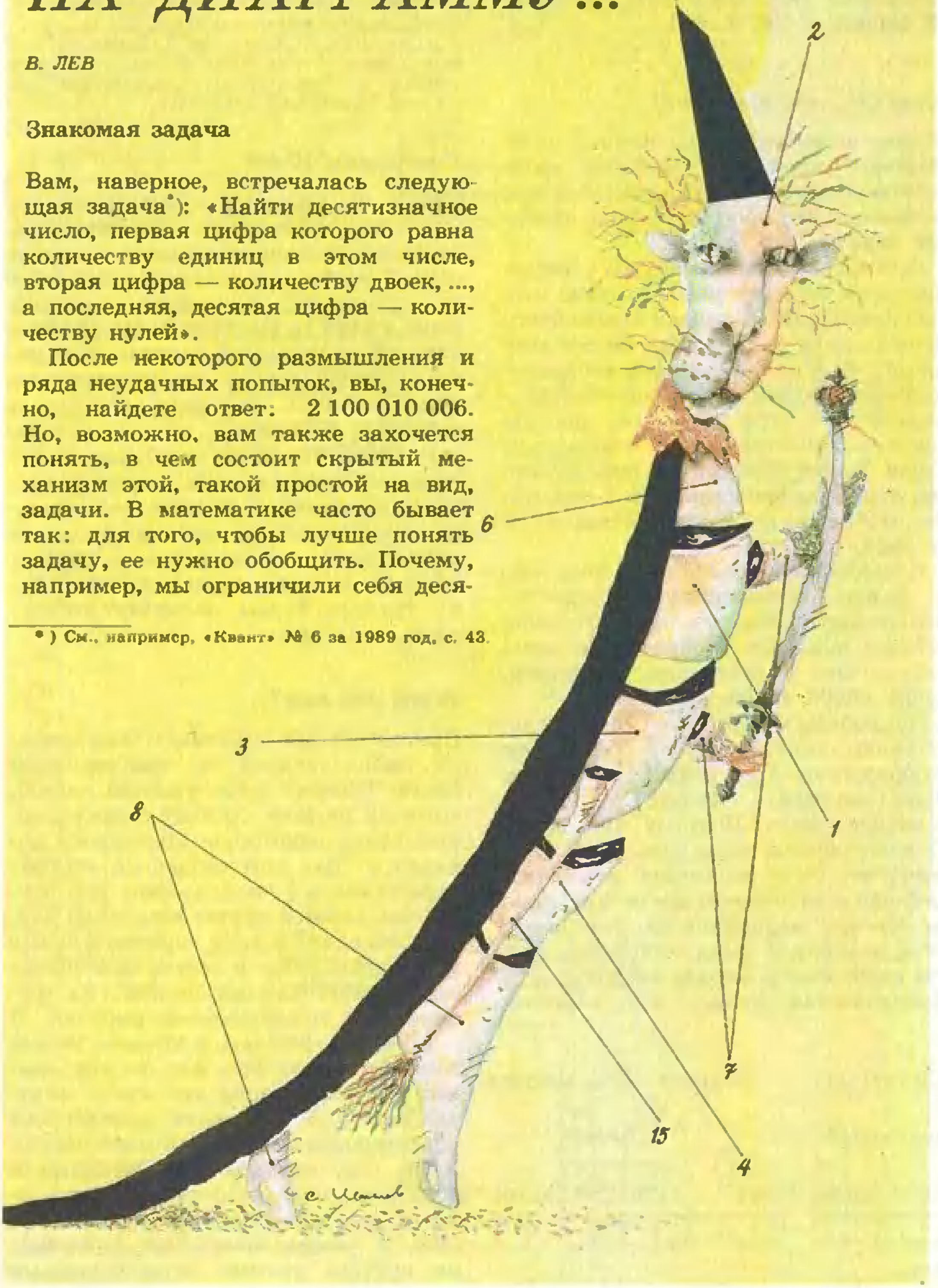
В. ЛЕВ

Знакомая задача

Вам, наверное, встречалась следующая задача*): «Найти десятизначное число, первая цифра которого равна количеству единиц в этом числе, вторая цифра — количеству двоек, ..., а последняя, десятая цифра — количеству нулей».

После некоторого размышления и ряда неудачных попыток, вы, конечно, найдете ответ: 2 100 010 006. Но, возможно, вам также захочется понять, в чем состоит скрытый механизм этой, такой простой на вид, задачи. В математике часто бывает так: для того, чтобы лучше понять задачу, ее нужно обобщить. Почему, например, мы ограничили себя деся-

*) См., например, «Квант» № 6 за 1989 год, с. 43.



тизначными числами? Напрашивается обобщение задачи: рассмотрим числа в системе счисления с основанием q, состоящие ровно из q цифр. Условимся для краткости называть их просто «q-числами».

Создадим себе проблему!

Вполне естественно, мы начнем с постановки проблемы, которой собираемся заниматься. А подскажет нам ее простая переформулировка исходной задачи.

Рассмотрим какое-нибудь q-число. Построим по нему новое q-число следующим образом: первая цифра этого нового числа будет равна количеству единиц в исходном числе, вторая — количеству двоек,..., предпоследняя — количеству цифр «$q-1$», последняя — количеству нулей в исходном числе. Таким образом, мы определили некоторое отображение на q-числах; это отображение проиллюстрировано на рисунке 1.

Исходная задача состоит в том, чтобы найти «неподвижную точку» такого отображения, т. е. такое q-число, которое при этом отображении переходит само в себя (как, например, число 12002 на рисунке 1).

Попробуем теперь проследить судьбу какого-нибудь q-числа при нашем отображении. Хотя q-чисел не так уж мало (подумайте, сколько), их все же конечное число. Поэтому последовательные образы исходного q-числа не могут все быть различны. А значит, начиная с некоторого места, эти образы начнут периодически повторяться — возникнет цикл наподобие тех, что изображены справа на рисунке 1. Неподвижная точка — это, конечно,

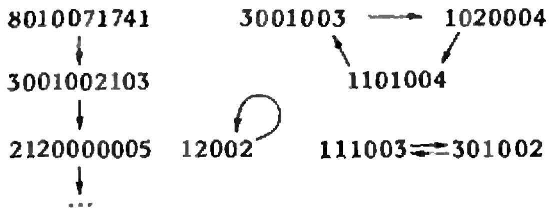


Рис. 1.

цикл единичной длины. Но интересно также описать все циклы такого отображения. Именно в этом и будет состоять наша проблема!

Упражнение. Свяжем с q-числом $A=(a_1a_2...a_q)$ величины $s(A)=a_1+a_2+\ldots+a_q$; $m(A)=a_1+2a_2+\ldots+(q-1)a_{q-1}$. Докажите, что если q-число A есть образ некоторого другого q-числа B при нашем отображении, то $s(A)=q$. Кроме того, $s(B)=m(A)$.

Диаграммы Юнга

Читатели «Кванта», наверное, уже знакомы с такими диаграммами, часто возникающими в связи с вопросами о разбиении натуральных чисел на слагаемые. Несколько примеров изображено на рисунке 2, где рядом с каждой диаграммой указан ее *порядок* — общее число квадратиков во всех столбцах диаграммы. Высота столбцов возрастает справа налево.

Группой столбцов мы будем называть совокупность всех столбцов диаграммы заданной высоты, если только количество таких столбцов не менее двух; все остальные столбцы (т. е. те, которые не попали ни в одну группу) будем называть *отдельными столбцами*.

Зачем они нам?

Пришло время объяснить, как связана наша задача с диаграммами Юнга. Прежде всего укажем способ, который любому q-числу ставит в соответствие некоторую диаграмму порядка q. Вот этот нехитрый способ: переставим в q-числе цифры так, чтобы одинаковые цифры следовали подряд, объединим их в горизонтальные прямоугольники и затем «повернем» эти прямоугольники, поставив их вертикально; взгляните на рисунок 3!

Конечно, разным q-числам может соответствовать одна и та же диаграмма: например, если эти числа получаются друг из друга некоторыми перестановками и переобозначениями цифр (см. рисунок 4). Очевидно и обратное: если два q-числа имеют одну и ту же диаграмму Юнга, то каждое из них может быть получено из другого такими перестановками

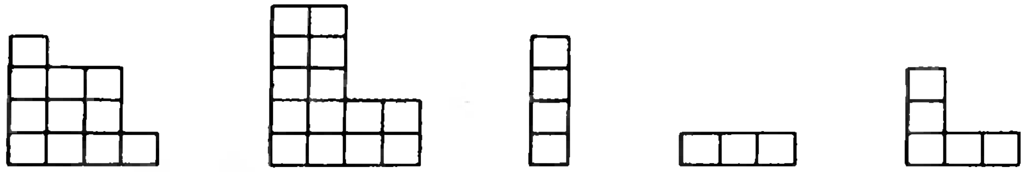


Рис. 2. $q=11$, $q=14$, $q=4$, $q=3$, $q=5$.

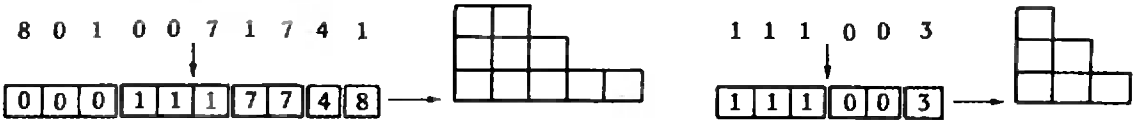


Рис. 3.

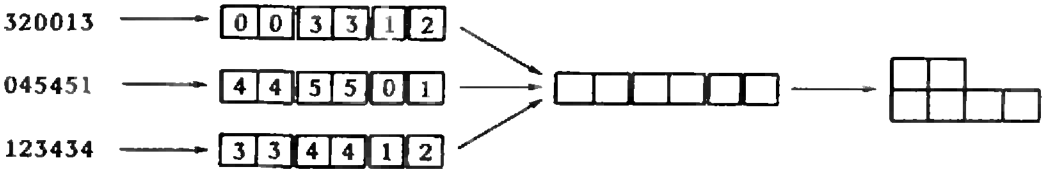


Рис. 4.

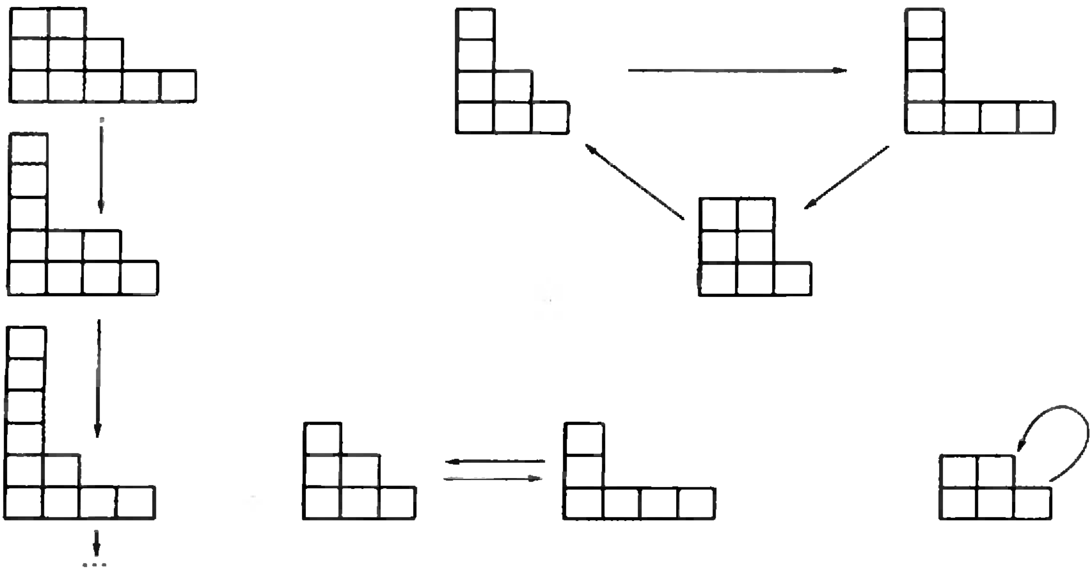


Рис. 5.

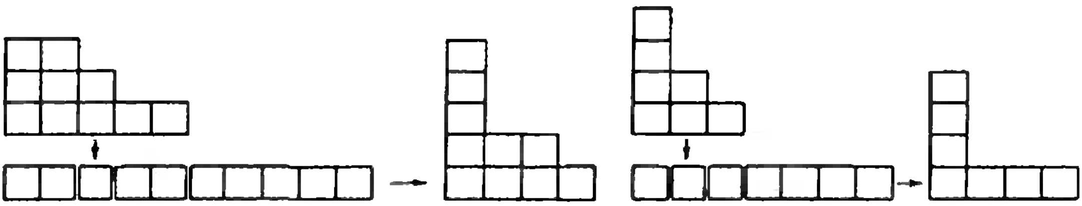


Рис. 6.

и переобозначениями. Заметим теперь, что их образы при нашем отображении q-чисел получаются друг из друга простой перестановкой цифр (обязательно проверьте это!), и, следовательно, эти образы также имеют одну и ту же диаграмму. Мы доказали следующее:

если двум q-числам соответствует одна и та же диаграмма Юнга, то их образам также соответствует одна и та же диаграмма Юнга.

Это утверждение, несмотря на простоту, имеет для нас решающее значение. Ни в коем случае не читайте дальше эту статью, пока оно не станет вам полностью очевидно!

Что же из этого следует?

Возьмем какую-нибудь диаграмму Юнга порядка q и рассмотрим любое порождающее ее q-число. Найдем затем образ этого q-числа и построим, в свою очередь, соответствующую этому образу диаграмму; «синее» утверждение (см. выше) означает, что эта последняя диаграмма полностью определяется той, которая была взята вначале. Таким образом, введенное нами выше отображение на множестве q-чисел определяет некоторое отображение на множестве диаграмм Юнга порядка q. Примеры этого последнего отображения приведены на рисунке 5.

Любой цикл отображения на q-числах, конечно, будет определять некоторый цикл отображения на диаграммах Юнга порядка q. Это позволяет от поиска циклов на q-числах перейти к поиску циклов на диаграммах Юнга. Конечно, потом надо будет еще «вернуться назад», найдя для каждого цикла на диаграммах Юнга все соответствующие циклы на q-числах. Однако это делается уже довольно легко; к этому вопросу мы вернемся в конце.

Итак, наша задача трансформировалась в следующую:

найти все циклы на диаграммах Юнга порядка q, определяемые введенным выше отображением диаграмм.

Давайте разберемся...

«как работает» построенное нами отображение диаграмм Юнга. Каждому отдельному столбцу исходной диаграммы соответствует ряд цифр исходного числа, имеющий «уникальную» длину, а значит, соответствует некоторая уникальная цифра числа-образа, т. е., в конце концов, соответствует столбец диаграммы-образа, имеющий единичную высоту. Совершенно аналогично, каждой группе столбцов исходной диаграммы соответствует один столбец диаграммы-образа, высота которого равна ширине основания этой группы столбцов. Кроме того, цифры 0 числа-образа не соответствуют никаким рядам цифр исходного числа. Эти нули порождают еще один столбец диаграммы-образа, который мы будем называть *дополнительным.*

Для того чтобы осуществить отображение исходной диаграммы в диаграмму-образ, необходимо:

1) нарисовать «длинный» прямоугольник высотой в одну и длиной в q клеточек, совместив его левую сторону и основание с левой стороной и основанием исходной диаграммы;

2) разбить «длинный» прямоугольник на несколько коротких вертикальными сторонами, ограничивающими группы столбцов и отдельные столбцы исходной диаграммы;

3) поставить вертикально полученные короткие прямоугольники, составив из них новую диаграмму Юнга. Это и будет диаграмма-образ.

Отображение диаграмм Юнга порядка q может быть полностью описано графом, показывающим, какая диаграмма в какую переходит. Для значений $q<7$ такие графы изображены на рисунке 7. Видно, например, что при $q=2$ и $q=6$ имеется ровно по одному циклу, состоящему из двух диаграмм; при $q=5$ и $q=7$ имеется по одной, а при $q=4$ — две неподвижные точки; циклы из трех диаграмм имеются лишь при $q=3$ и $q=7$ (как мы докажем чуть позже, таких циклов больше нет ни при каких других значениях q).

и теперь мы полностью готовы к этому. Так как случаи $q<7$ уже разобраны на рисунке 7, мы будем считать, что $q>7$. Внимательный читатель уже мог догадаться, в чем состоит наша основная идея: помните, при описании отображения на диаграммах Юнга мы говорили, что «каждой группе столбцов исходной диаграммы соответствует один столбец диаграммы-образа»? Это означает, что, как правило, число столбцов при переходе к диаграмме-образу может лишь уменьшиться. Точнее, число столбцов может увеличиться лишь в том случае, если все столбцы исходной диаграммы являются отдельными; неизменным же число столбцов может оставаться только в случае, если диаграмма содержит ровно одну группу, состоящую из двух столбцов, а все остальные столбцы должны быть отдельными. На этом и будет основано наше решение: ведь если мы возьмем любой цикл на диаграммах Юнга, то либо все диаграммы этого цикла будут содержать одно и то же количество столбцов, либо по крайней мере одна диаграмма цикла будет содержать строго меньше столбцов, чем ее образ. Иначе говоря, в каждом цикле либо все диаграммы содержат одну группу из двух столбцов и некоторое (постоянное для всех диаграмм цикла) число отдельных столбцов; либо найдется диаграмма, состоящая лишь из отдельных столбцов. Эти две возможности мы сейчас и рассмотрим последовательно.

А. Пусть все диаграммы нашего цикла включают группу из двух столбцов и некоторое количество отдельных столбцов, одно и то же для всех диаграмм цикла.

Рассмотрим некоторую диаграмму цикла. Ее диаграмма-образ, также принадлежащая циклу, будет состоять из столбца высоты 2, некоторого количества столбцов единичной высоты и дополнительного столбца; так как эта диаграмма подчиняется общему правилу — «группа из двух и некоторое количество отдельных столбцов»,— то легко проверить, что число столбцов единичной высоты — ровно 2, а дополнительный столбец имеет высоту не менее трех клеточек (при этом надо учесть условие $q>7$). Но тогда следующая диаграмма цикла будет состоять из столбца высотой 2, двух столбцов единичной высоты и дополнительного столбца высотой $q-4$; такой же вид будут иметь и все последующие диаграммы, т. е. на самом деле наш цикл состоит всего из одного элемента — он является неподвижной точкой отображения диаграмм Юнга порядка q (см. рис. 8 слева).

В. Пусть одна из диаграмм нашего цикла состоит лишь из отдельных столбцов.

Тогда следующая диаграмма состоит из столбцов единичной высоты и

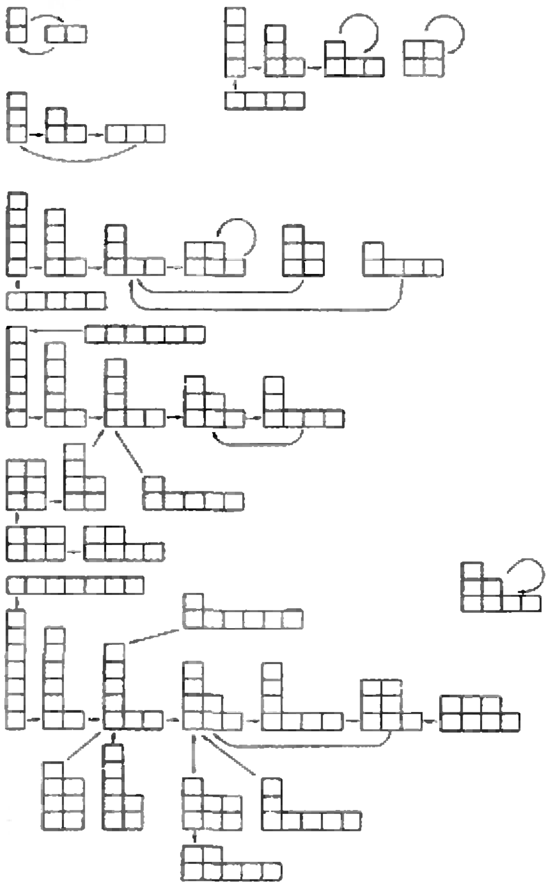


Рис. 7.

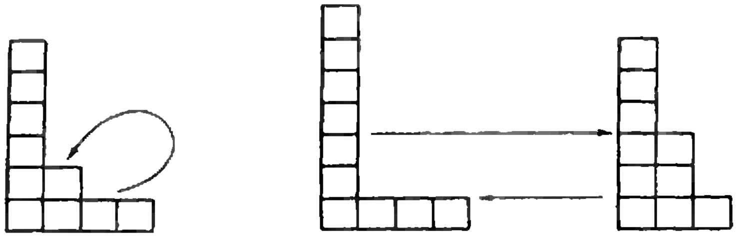


Рис. 8.

Начнем с цикла длиной 1 — неподвижной точки отображения диаграмм Юнга. Порождающее единственную диаграмму этого цикла число включает группу из ($q-4$)-х одинаковых цифр, группу из двух цифр и еще некоторые две различные цифры; следовательно, образ этого числа будет состоять из цифр ($q-4$), 2, 1, 1, а все остальные цифры образа — нули; но тогда следующий образ будет иметь первую цифру 2, вторую цифру 1, ($q-4$)-ю цифру 1, последнюю цифру ($q-4$), а остальные цифры — нули; так же будут выглядеть и все последующие образы. Итак, единственный цикл на q-числах, порождающий неподвижную точку отображения диаграмм Юнга, сам является неподвижной точкой: он состоит из единственного числа 210...010...0 ($q-4$) (вторая единица стоит на ($q-4$)-ом месте). При $q=10$ это число уже встречалось вам в самом начале статьи.

Цикл длины 2 рассматривается совершенно аналогично. Мы предоставим детали заинтересованному читателю, а здесь сообщим лишь результат: этот цикл также порождается ровно одним циклом на q-числах, состоящим из двух элементов: 30...0100 ($q-4$) и 1010...01000 ($q-3$).

дополнительного столбца, высота которого больше 1 (последнее очевидно, так как высота дополнительного столбца равна числу клеточек исходной диаграммы, находящихся «не ниже второго этажа» диаграммы). В свою очередь, образ этой диаграммы будет включать три столбца, один из которых — единичной высоты. Все эти три столбца не могут иметь одинаковую высоту (почему?); если же совпадают некоторые две высоты, то следующая диаграмма цикла все-таки будет состоять из трех столбцов с различными высотами. Итак, в любом случае в нашем цикле встретится диаграмма, состоящая из трех столбцов с различными высотами; следующая диаграмма будет состоять из трех столбцов единичной высоты и дополнительного столбца высотой $q-3$; следующая — вновь из трех столбцов с различными высотами (равными 3, 1 и $q-4$: мы вновь используем условие $q>7$) и т. д.,— мы пришли к циклу, состоящему из двух диаграмм (см. рис. 8 справа).

Наша задача решена. Мы показали, что для отображения на диаграммах Юнга порядка $q>7$ имеется ровно два цикла: одна неподвижная точка и один цикл длиной 2.

Назад, к q-числам!

Для того чтобы полностью завершить наше небольшое исследование, остается вернуться от диаграмм Юнга к q-числам, определив, какие циклы на q-числах могут порождать найденные нами два цикла на диаграммах Юнга при $q>7$. К счастью, проделать это совсем не сложно.

И в заключение — нерешенная задача

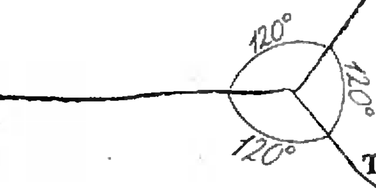
Итак, мы знаем, что каждое q-число в конце концов попадет либо в неподвижную точку, либо в цикл длиной два. Но как предсказать «судьбу» конкретного q-числа? Вероятно, есть признак, позволяющий по виду числа определять, какая именно из двух возможностей реализуется. Автору не удалось найти такой признак. Может быть, кто-нибудь из читателей сможет решить эту задачу?

КРАТЧАЙШИЕ СЕТИ

Е. АБАКУМОВ, О. ИЖБОЛДИН,
Л. КУРЛЯНДЧИК, Н. НЕЦВЕТАЕВ

В этой статье мы расскажем об одной знаменитой задаче (задаче Штейнера):

жители нескольких деревень хотят проложить дороги так, чтобы из каждой деревни можно было проехать в любую другую, причем общая длина дорог была бы наименьшей возможной.



Три деревни

Три деревни соединить кратчайшим образом довольно просто: если в треугольнике, образованном этими деревнями, все углы меньше 120°, то следует соединить вершины треугольника с точкой, из которой все стороны видны под углом в 120° (рис. 1).

Для доказательства этого поступим так: положим на стол план местности и затем просверлим в столе отверстия в местах расположения деревень. Пропустим через эти отверстия три веревочки, верхние концы которых свяжем в один узел, а к нижним подвесим грузики массой по 1 кг.

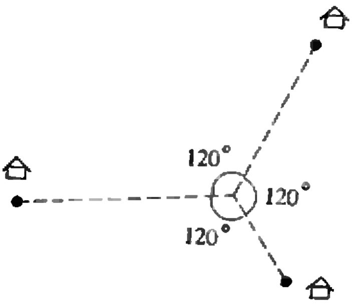


Рис. 1.

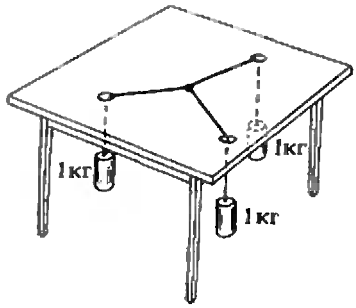


Рис. 2.

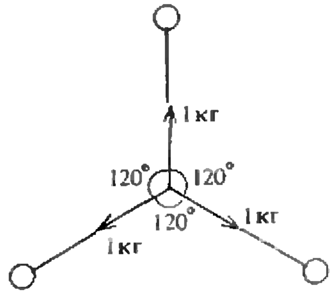


Рис. 3.

(рис. 2). Веревочки на столе займут положение с минимальной суммарной потенциальной энергией грузиков. Значит, общая длина веревочек под столом окажется максимально возможной, а веревочки на поверхности стола укажут искомое кратчайшее соединение данных трех точек. Остается только понять, почему узел при этом попадет в точку, из которой все стороны видны под углом в 120°. Для этого достаточно заметить, что на узел действуют три одинаковые по величине силы (рис. 3), а они могут уравновесить друг друга только в том случае, если все три угла, образованные ими, равны.

Упражнение 1. Докажите это.

И в этом месте мы могли бы уже закончить доказательство, если бы были уверены, что узел не попадет в отверстие. Но что это значит — узел попал в отверстие? Это означает, что сумма двух сил натяжения, направленных по сторонам треугольника (рис. 4), не превышает 10 Н. А это возможно лишь в случае, когда угол, образованный этими силами, не менее 120°.

Подведем итог обсуждению задачи о соединении трех точек *A*, *B*, *C* кратчайшей сетью дорог.

Если все углы треугольника ABC меньше 120°, то нужно соединить все вершины с точкой, из которой все стороны видны под углом 120°. Если же один из углов треугольника не меньше 120°, то вершину этого угла следует соединить с двумя другими вершинами.

Решение закончено, но нам хочется сделать к нему три замечания.

Замечание первое. По сути дела исходную задачу о кратчайшей сети, связывающей три данные точки, мы подменили задачей о нахождении точки, для которой сумма расстояний до этих трех,— наименьшая возможная. (Кстати, такая точка называется точкой Ферма.)

Упражнения

2. Обоснуйте правомерность такой переформулировки.

3. Выясните, возможна ли аналогичная переформулировка в случае четырех точек.

Замечание второе. Можно предложить другой способ построения кратчайшей сети дорог. Положим на стол план местности и затем вобьем три гвоздя в местах расположения деревень. После этого натянем резинку, используя маленькое колечко, так, как это показано на рисунке 5. При отсутствии сил трения резинка в натянутом состоянии займет такое положение, при котором ее длина будет минимальной, а это нам и даст кратчайшую сеть дорог.

Замечание третье. Да, мы научились находить кратчайшую сеть в треугольнике. Но решение задачи обошлось нам не дешево: пришлось испортить стол. Хорошо бы найти чисто геометрическое построение необходимой нам точки (из которой все стороны видны под углом 120°). Построим на сторонах треугольника *ABC* равносторонние треугольники во внешнюю сторону (рис. 6). Тогда искомая точка будет точкой пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1. (Естественно, что сейчас мы говорим о

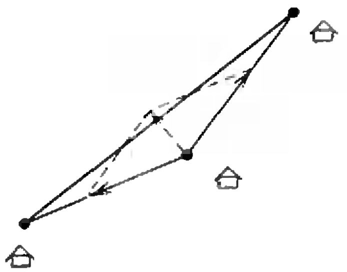


Рис. 4.

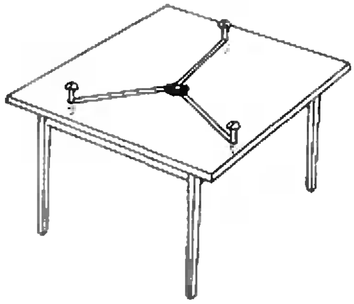


Рис. 5.

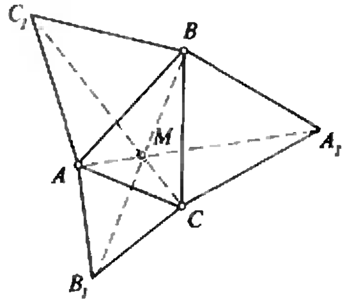


Рис. 6.

случае, когда углы треугольника ABC меньше 120°.)

Упражнения

4. Докажите, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

5. Докажите, что точка пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1 — искомая.

6. Пусть M — точка пересечения отрезков AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что $AM+BM+CM=$ $=AA_1=BB_1=CC_1$.

7. Докажите, что для любой точки X треугольника ABC выполнено неравенство $AX+BX+CX\geqslant AM+BM+CM$.

8. Используя результаты предыдущих упражнений, приведите чисто геометрическое решение задачи о кратчайшем соединении трех точек.

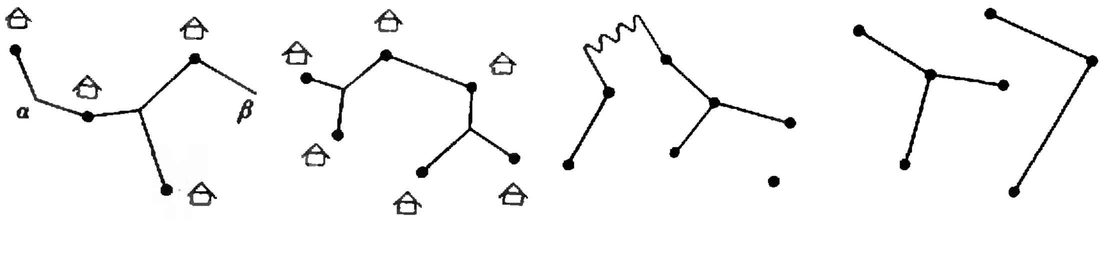
Свойства кратчайшей сети

Итак, мы решили задачу о соединении трех деревень кратчайшей сетью дорог. Переходя к общему случаю, сформулируем возникающую перед нами задачу.

Даны n точек на плоскости. Требуется соединить их сетью отрезков, имеющих наименьшую общую длину.

Такая сеть называется *кратчайшей*. Во избежание недоразумений уточним понятие сети. *Сетью, соединяющей данные n точек*, мы будем называть такой набор из конечного числа отрезков, что любые две исходные точки являются концами ломаной из отрезков этого набора. Исходные n точек мы будем называть *деревнями*. Все остальные концы отрезков сети будем называть *развилками*. На рисунках 7, *а*, *б* приведены примеры сетей, а то, что изображено на рисунках 7, *в*, *г*, сетями не является.

На рисунке 7, *а* развилка α по сути дела лишняя и уж совсем не согласуется с интуитивным представлением о развилках. Также очевидно, что можно обойтись и без развилки β (которая скорее является тупиком). Эти наблюдения подсказывают, что, говоря о кратчайших сетях, мы можем ограничиваться случаем, когда в каждой развилке сходится не менее трех отрезков. Строго это можно доказать так. Если бы из какой-нибудь развилки выходило ровно два отрезка, то их можно было бы заменить одним отрезком, соединяющим их концы (при этом общая длина сети не увеличится). Ну а если бы развилка



а) б) в) г)

Рис. 7.

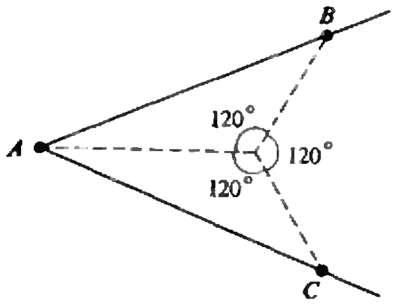


Рис. 8.

являлась концом только одного отрезка, то, выкинув этот отрезок, мы бы также уменьшили длину сети.

Выясним, какой угол могут образовывать два отрезка кратчайшей сети, выходящие из одной точки. Этот угол не может быть меньше 120°. Действительно, если бы отрезки AB и AC образовывали угол меньше 120°, то, заменив участок сети, образованный этими отрезками, на кратчайшую сеть треугольника ABC (рис. 8), мы уменьшили бы общую длину сети. Отсюда, в частности, следует, что из каждой деревни и из каждой развилки выходит не более трех отрезков.

Подводя итог всему сказанному, получаем два главных свойства кратчайшей сети.

Свойство 1. *Из всякой развилки выходит ровно три отрезка. Каждые два из них образуют угол в 120°.*

Свойство 2. *Из каждой деревни выходит один, два или три отрезка, причем если из деревни выходит два отрезка, то угол между ними не меньше 120°, а если выходят три отрезка, то углы между ними равны 120°.*

Нам потребуются и некоторые другие свойства кратчайших сетей. Сформулируем еще одно — простое, но важное

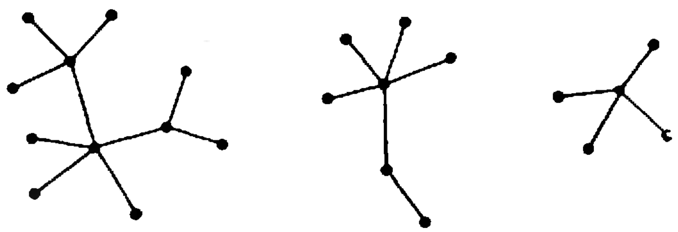
Свойство 3. *Никакие отрезки сети не образуют замкнутую ломаную.*

Это почти очевидно. Действительно, если в сети нашлась замкнутая ломаная, то, выкинув произвольное звено этой ломаной, мы уменьшим длину сети. При этом любые две деревни останутся связанными.

Сколько может быть развилок в сети?

Итак, нами доказаны три основных свойства кратчайшей сети. Тем из вас, кто знаком с понятием графа, конечно же ясно, что кратчайшая сеть является *деревом*. А для тех, кто еще не встречался с этими понятиями, скажем, что под деревом мы понимаем такой набор отрезков на плоскости, что в нем нет замкнутых ломаных, а вся картинка является «связной», т. е. любые два конца этих отрезков соединяются ломаной. Примеры деревьев изображены на рисунках 9, *а—в*. Отрезки, из которых состоит дерево, принято называть ребрами, а концы отрезков — вершинами.

Посмотрите на рисунок 9: у каждого из деревьев количество вершин на единицу больше числа ребер. Это свойство выполнено для любого дерева. Доказывается это индукцией по числу вершин: возьмем какую-нибудь вершину, из которой выходит только одно ребро (почему такая вершина всегда найдется?), и отбросим эту вершину вместе с ребром. Мы снова



а) б) в)

Рис. 9.

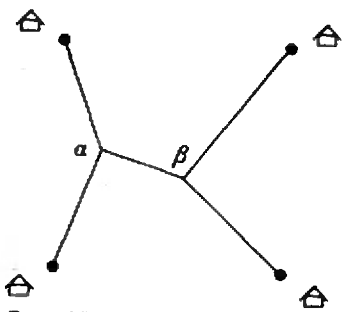


Рис. 10.

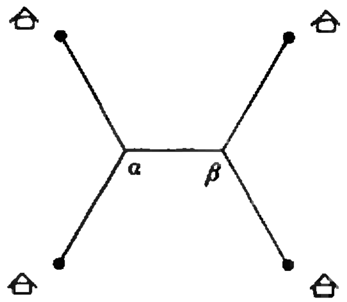


Рис. 11.

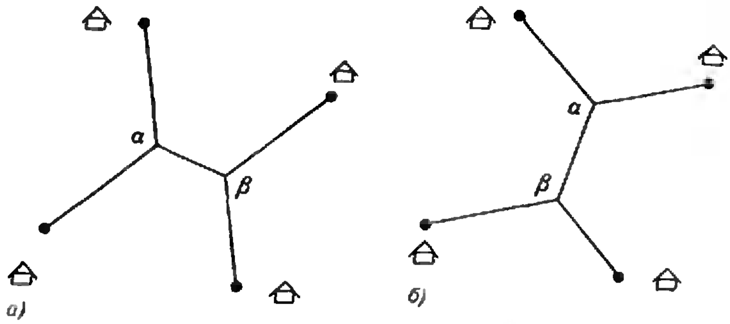


Рис. 12.

получим дерево, но уже с меньшим числом вершин. По предположению индукции, число вершин нового дерева равно числу его ребер плюс единица. Значит это свойство выполнено и для исходного дерева.

Подводя итог сказанному, получаем: *число деревень плюс число развилок на единицу больше числа отрезков сети.* Посчитаем количество отрезков сети другим способом. Так как из каждой развилки выходят три отрезка, а из каждой деревни хотя бы один отрезок, то число отрезков заведомо не меньше, чем $\frac{3Р+Д}{2}$ ($Р$ — число развилок, $Д$ — число деревень; делим пополам потому, что у отрезка два конца!). Т. е. $Д+Р-1 \geqslant \frac{3Р+Д}{2}$.

Значит, $Р \leqslant Д-2$.

Тем самым, мы получили еще одно свойство кратчайшей сети.

Свойство 4. *Число развилок по крайней мере на две меньше числа деревень.*

Упражнение 9. Докажите, что количество развилок кратчайшей сети равно $Д_1-Д_3-2$, где $Д_1$ — количество деревень, из которых выходит один отрезок, а $Д_3$ — количество деревень, из которых выходит три отрезка.

Четыре деревни в вершинах квадрата

Мы располагаем уже достаточными знаниями о кратчайших сетях. Попробуем их применить в конкретной ситуации. Рассмотрим четыре деревни, расположенных в вершинах квадрата. Как их соединить кратчайшим образом?

Понятно, что кратчайшая сеть не выходит за пределы квадрата. Отсюда следует, что из каждой деревни выходит ровно одна дорога. Действительно, если бы из какой-то деревни выходило не менее двух, то образованный ими угол был бы не больше 90°. А это противоречит второму свойству кратчайшей сети.

Воспользовавшись обозначениями из упражнения 9, получаем, что $Д_1=4$, $Д_3=0$, и, значит, количество развилок равно $Д_1-Д_3-2=2$. Понятно, что эти две развилки соединены отрезком, а каждая из них соединяется с двумя деревнями (рис. 10). На этом рисунке нам неизвестно точное расположение развилок α и β. Как же определить их истинное расположение в квадрате?

Воспользуемся еще раз вторым свойством кратчайшей сети: все шесть углов на рисунке 10 должны быть равны 120°. Пример сети с таким условием нарисовать несложно (рис. 11).

Четыре деревни

Решим теперь более сложную задачу: четыре деревни расположены в вершинах выпуклого четырехугольника, все углы которого меньше 120°. Как их соединить кратчайшим образом?

Повторяя рассуждения, приведенные при решении задачи о кратчайшей сети в квадрате, получаем, что и в данном случае кратчайшая сеть должна иметь ровно две развилки, а из каждой деревни должна выходить одна дорога. Возможно ровно два способа соединения A, B, C, D с таким условием (рис. 12, *а*, *б*). (В случае квадрата мы обошлись рассмотрением одного способа соединения, ибо второй способ попросту получается поворотом на 90°.)

Естественно, возникает вопрос: какой же именно вид — 12,*а* или 12,*б* — имеет кратчайшая сеть? Ответ на этот вопрос можно получить лишь найдя кратчайшую сеть каждого из двух видов и сравнив их по длине. Итак, требуется построить кратчайшую сеть данного вида (скажем, 12, *а*), т. е. найти истинное положение развилок α и β.

Построение развилок (рис. 13) мы начнем с замечания, что отрезки $A\alpha$, $B\alpha$, $\alpha\beta$ образуют кратчайшую сеть в треугольнике $AB\beta$. Значит, развилка α является точкой Ферма в этом треугольнике. Аналогично, точка β является точкой Ферма в треугольнике $CD\alpha$.

Построим на отрезках AB и CD во внешнюю от четырехугольника сторону равносторонние треугольники ABO_1 и CDO_2. Точки O_1, α, β — лежат на одной прямой (см. упражнение 5). По тем же причинам и точки O_2, β, α лежат на одной прямой. А значит, все четыре точки O_1, α, β, O_2 лежат на одной прямой. Теперь уже построить точки α и β легко: это точки пересечения описанных вокруг равносторонних треугольников ABO_1 и CDO_2 окружностей с отрезком O_1O_2 (рис. 13).

Итак, мы построили кратчайшую сеть вида 12, *а*. Аналогичным образом строится кратчайшая сеть вида 12, *б*. Из двух построенных соединений более короткое и является ответом задачи.

Упражнения

10. Где в доказательстве использовано условие, что все углы четырехугольника меньше 120°?

11. Докажите, что длина кратчайшей сети, построенной по рисунку 13, равна длине отрезка O_1O_2.

12. Найдите механическое решение этой задачи, используя два колечка, резинку и четыре гвоздя.

13. Найдите длину кратчайшей сети в прямоугольнике 3×4.

Правильный пятиугольник

Решим теперь задачу о нахождении кратчайшей сети для пяти деревень, расположенных в вершинах правильного пятиугольника. При решении этой задачи поступим так же, как и в случае четырех деревень. Так как все углы в правильном пятиугольнике меньше 120°, то из каждой вершины пятиугольника выходит ровно один отрезок. Следовательно, число развилок сети, равное D_1-D_3-2 (см. упражнение 9), в данном случае равно трем, так как $D_1=5$, $D_3=0$. По существу, достаточно рассмотреть один вариант соединения (рис. 14), так как остальные четыре способа соединения с тремя развилками получаются из него поворотом. Теперь остается найти истинное расположение развилок α, β, γ. Для построения этих развилок воспользуемся уже применявшейся идеей: построим на отрезках AB и DC правильные треугольники ABO_1 и DCO_2 во внешнюю от пятиугольника сторону. Поскольку развилки α и γ должны лежать на отрезках $O_1\beta$ и $O_2\beta$, то отрезки βO_1, βO_2 и βE должны образовывать углы 120°, и, следова-

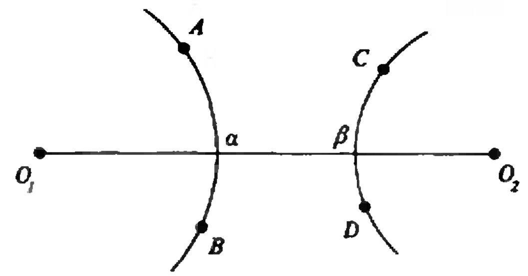


Рис. 13.

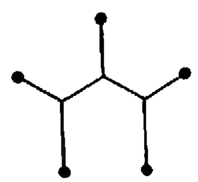


Рис. 14.

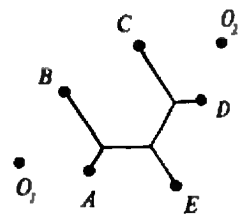


Рис. 15.

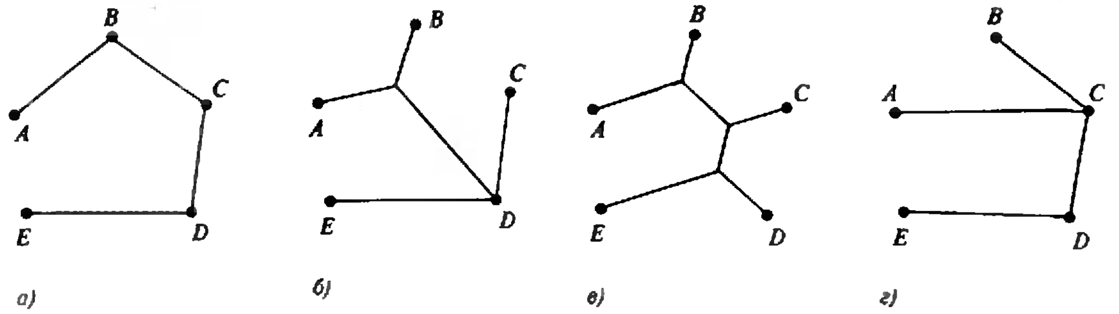


Рис. 16.

тельно, β является точкой Ферма в треугольнике O_1O_2C. Как строить точку Ферма в треугольнике, мы уже знаем.

Теперь уже легко строятся развилки α и γ — это точки Ферма в треугольнике $AB\beta$ и $CD\beta$. Получившаяся сеть и является кратчайшей для вершин правильного пятиугольника $ABCDE$ (см. рис. 15).

Построение кратчайшей сети

А как же решить задачу в общем случае, т. е. соединить n деревень кратчайшей сетью дорог? Внимательный читатель, конечно же, заметил, что решение задачи в случае четырех и пяти деревень разбивалось на два этапа. Сначала мы выяснили, каким может быть граф соединения, т. е. определяли, сколько может быть развилок и какие из развилок и деревень соединены отрезками. На втором этапе, используя эту информацию (о графе соединения), мы находили истинное положение развилок. Именно так мы поступим и в общем случае.

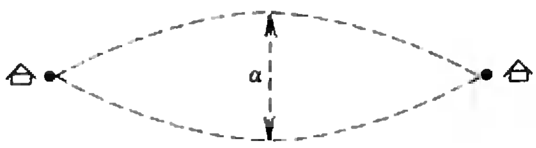
Начнем с первого этапа. Как нам известно, количество развилок не больше чем $n-2$, и поэтому возможных схем (точнее, графов) соединения данных n точек лишь конечное число. Следовательно, первый этап сводится к конечному перебору всех возможных графов соединения. Примеры некоторых возможных графов соединения пяти деревень изображены на рисунках 16, *а*—*г*.

Теперь перейдем ко второму этапу: построение кратчайшей сети по данному ее графу. Достаточно научиться сводить задачу о построении сети для n деревень к построению сети для меньшего числа деревень.

Итак, пусть у нас есть граф соединения n деревень. Если в этом графе какие-то деревни соединены отрезком, то, выбросив его, мы разобьем наш граф на два с меньшим числом деревень. Для каждого из этих графов задачу о кратчайшей сети нужно решать отдельно. Предположим теперь, что всякий отрезок, выходящий из деревни, ведет в развилку. Так как количество развилок меньше числа деревень, то из каких-то двух деревень отрезки ведут в одну развилку. Обозначим эти деревни и развилку буквами A, B и α.

Ясно, что развилка α является точкой Ферма треугольника $AB\beta$ (рис. 13). Воспользуемся идеей, которую мы уже неоднократно применяли: построим равносторонний треугольник ABO_1. Как известно, в кратчайшей сети развилка α обязана лежать на отрезке $O_1\beta$. Теперь задача сводится к меньшему числу деревень заменой двух деревень A и B на одну, находящуюся в точке O_1, и заменой отрезков $A\alpha$, $B\alpha$, $\alpha\beta$ на отрезок $O_1\beta$. Построив сеть для новой системы деревень (вместо A и B — точка O_1), мы найдем точное положение всех развилок, кроме одной — развилки α. Ну а эта развилка является точкой пересечения окружности, описанной вокруг треугольника ABO_1, и отрезка $O_1\beta$. Так как теперь все развилки построены, то задача решена.

А теперь мы обращаемся к придирчивому читателю, который, конечно



Чем меньше a, тем короче сеть!

Рис. 17.

же, обнаружил в доказательстве ряд неточностей. Чтобы исправить положение, мы предлагаем ряд упражнений, решив которые, вы сможете ликвидировать пробелы в доказательстве.

Упражнения

14. Как быть в случае, когда из какой-то из деревень A или B ведет не одна, а по крайней мере две дороги?

15. На стороне AB можно построить два равносторонних треугольника. Какой именно нужно выбрать?

16. Второй этап доказательства состоял в описании способа построения сети по данному графу. Всегда ли это построение приведет к некоторой сети?

17. Что делать, если точка O_1 совпадет с какой-то из деревень? Что делать, если какой-то из отрезков Aa или Ba пересечет какой-нибудь из построенных отрезков?

Зачем нужны теоремы существования?

Можно ли считать, что поставленную нами задачу о кратчайшем соединении n точек на плоскости мы решили полностью? Оказывается, нет!

В нашем решении отсутствует очень существенная деталь: нет доказательства того, что кратчайшая сеть существует. Но является ли этот вопрос действительно принципиальным? Несомненно, да. Ведь сам алгоритм построения кратчайшей сети основан на факте ее существования. Может, однако, возникнуть впечатление, что сам факт существования очевиден, а доказательство нужно лишь потому, что так уж принято у математиков — все доказывать. Но такое впечатление обманчиво. Чтобы проиллюстрировать сказанное — рассмотрим задачу.

Требуется соединить кратчайшим образом две деревни сетью дорог так, чтобы при закрытии движения по любому отрезку сети деревни оставались бы связанными.

Постановка этой задачи похожа на исходную, а задача, несомненно, более проста — ведь деревень всего две. Однако сходство чисто внешнее — кратчайшей сети в данном случае попросту нет (рис. 17).

Теперь мы надеемся, что убедили вас не только в необходимости доказательства существования кратчайшей сети, но и в том, что сам факт существования совершенно не очевиден.

Однако должны вас разочаровать. Мы не сможем изложить это доказательство — оно выходит за рамки школьной программы. Мы лишь хотели продемонстрировать принципиальное значение теорем существования. В заключение предлагаем несколько тем для исследований.

1. Решите задачу о кратчайшем соединении вершин правильного n-угольника.
2. Рассмотрите задачу о кратчайшем соединении нескольких деревень при наличии препятствий (например, круглого озера).
3. Рассмотрите задачу о кратчайшем соединении для точек в пространстве.

И еще несколько слов об алгоритмах. В математике часто бывает, что алгоритм решения какой-либо задачи существует, но его практическая реализация занимает слишком много времени. В таком случае содержательной задачей становится поиск быстрых алгоритмов (особенно важным это стало с развитием вычислительной техники). Типичный пример такой ситуации — всем знакомый алгоритм умножения чисел «в столбик». Сейчас обнаружены гораздо более быстрые алгоритмы умножения, основанные на глубоких математических идеях (например, на преобразовании Фурье). Другой пример — проблема разложения чисел на множители, имеющая большое практическое значение (на этом основаны некоторые коммерческие шифры). Если вас интересуют удобные алгоритмы построения кратчайших сетей, советуем вам прочитать посвященную этому предмету статью в журнале «В мире науки» № 3 за 1989 год.

Р-значит ракета

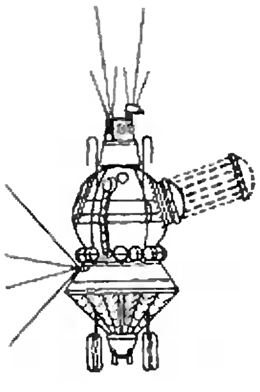
Человек за бортом

(к 25-летию полета «Восхода-2»)

Когда открыли наружную дверь и я увидел себя у порога ракеты, я обмер и сделал судорожное движение, которое вытолкнуло меня из ракеты. Уж, кажется, привык я висеть без опоры между стенками этой каюты, но когда я увидел, что подо мною бездна, что нигде кругом нет опоры,— со мной сделалось дурно, и опомнился я только тогда, когда вся цепочка уже размоталась и я находился в километре от ракеты.

К. Э. Циолковский. Вне Земли

18 марта 1965 года, т. е. ровно 25 лет назад, на орбиту искусственного спутника Земли был выведен космический корабль «Восход-2». Его пилотировали П. И. Беляев и А. А. Леонов. Полет корабля длился всего 25 часов, но два обстоятельства сделали его историческим.



Первое и самое главное — впервые человек совершил выход в открытое космическое пространство. Разумеется, сегодня выходом уже никого не удивишь (впрочем, чем сегодня вообще можно удивить?). Однако 25 лет назад задача эта совсем не казалась такой уж тривиальной.

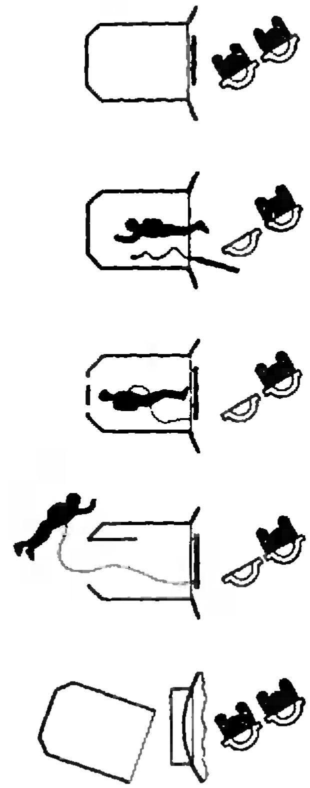
Какие проблемы надо было решить? Во-первых, вопрос организации шлюзовой камеры (ШК). Можно было, конечно, выходить напрямую из кабины корабля (несколько позже американцы так и поступили на «Джемини»). Но тогда пришлось бы ужесточить требования к бортовой аппаратуре. В нештатной ситуации она и так должна работать в разгерметизированной кабине, но это в нештатной...

В небольшой кабине «Восхода» разместить ШК не представлялось возможным. Значит, надо было делать ее снаружи. Но законы аэродинамики неумолимы. Принимается оптимальное решение — делать ШК надувной.

Кроме организации шлюзовой камеры, надо было решить, каким образом обеспечить дыхание космонавта во время выхода. Подавать воздух по шлангу не только не выгодно по массовым затратам, но и небезопасно (шланг мог где-нибудь перегнуться или порваться). Поэтому решено было снабдить космонавта баллонами с кислородом. Что же касается телефонной и телеметрической связи, то она осуществлялась через кабель.

Скафандр А. Леонова существенно отличался от скафандров в предыдущих полетах: ведь он должен был обеспечить жизнедеятельность не просто в вакууме, но и при почти 300-градусных перепадах температуры (на освещенной и затененной сторонах).

Разумеется, были еще проблемы, с которыми раньше не приходилось сталкиваться, но наиболее интересная из них, на наш взгляд, не техническая, а психологическая.



На рисунке показано, как осуществлялся выход в космическое пространство. Что же испытал А. Леонов, стоя на срезе шлюза? Были ли его чувства близки чувствам, описанным в повести К. Э. Циолковского? Так ли уж далека от реальной реакция его героя? В книге «Психология и космос» Ю. Гагарина и В. Лебедева приводится рассказ одного испытателя

(Окончание см. на с. 43)

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из «Задачника «Кванта». Объявляем имена победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1989 года. Награждаются свидетельством и значком журнала «Квант» и получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады 1990 года:

По математике

А. Акопян — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 11 кл.
А. Алексеев — Донецк, с. ш. № 17, 11 кл.
А. Блинова — Ленинград, с. ш. № 239, 11 кл.
К. Волченко — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
И. Герман — Ленинград, с. ш. № 566, 10 кл.
Х. Джафаров — с. Тюркоба АзССР, 11 кл.
И. Изместьев — Киров, с. ш. № 35, 9 кл.
С. Иноземцев — Омск, с. ш. № 92, 11 кл.
Д. Кабыш — Москва, с. ш. № 21, 11 кл.
С. Кимбар — Дзержинск Минской обл., с. ш. № 4, 11 кл.
С. Ковапенко — Винница, с. ш. № 6, 10 кл.
Д. Козлов — Ленинград, с. ш. № 566, 10 кл.
М. Марченко — Гайворон, с. ш. № 2, 11 кл.
Р. Мучник — Винница, с. ш. № 17, 10 кл.
А. Насыров — Обнинск, с. ш. № 5, 10 кл.
А. Наумович — Минск, с. ш. № 19, 9 кл.
В. Некрашевич — с. Крутые Горбы Киевской обл., 9 кл.
А. Ненашев — Хабаровск, с. ш. № 2, 10 кл.
Г. Онмани — Кутаиси, ФМШ, 11 кл.
В. Острик — Мариуполь, с. ш. № 7, 11 кл.
Т. Панов — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Е. Перельман — Ленинград, с. ш. № 239, 7 кл.
Ф. Попеленский — Москва, с. ш. № 91, 11 кл.
В. Стакаускас — с. Воке ЛитССР, с. ш. № 13, 10 кл.
С. Тихонов — Воронеж, с. ш. № 58, 11 кл.
К. Фельдман — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 9 кл.

По физике

Т. Бакеев — Алма-Ата, РФМШ, 11 кл.
Н. Балюнас — Вильнюс, с. ш. № 45, 11 кл.
Г. Вейтас — Вильнюс, с. ш. № 45, 11 кл.
Г. Выгон — Москва, с. ш. № 978, 11 кл.
К. Галичский — Северодвинск, с. ш. № 17, 11 кл.
Ю. Гуц — Ровно, с. ш. № 13, 10 кл.
А. Жук — Ровно, с. ш. № 15, 11 кл.
Ф. Ибрагимов — Баку, с. ш. № 61, 11 кл.
Ал. Карпенко — Брест, с. ш. № 1, 11 кл.
Ан. Карпенко — Брест, с. ш. № 1, 11 кл.

С. Кельман — Алма-Ата, РФМШ, 11 кл.
М. Колпаков — п. Почет Красноярского края, 10 кл.
Ю. Контиевский — Каушаны, с. ш. № 4, 11 кл.
В. Кутузов — Рига, с. ш. № 79, 11 кл.
А. Лемперт — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 11 кл.
Д. Массино — Ташкент, с. ш. № 110, 11 кл.
Ю. Матюнин — Вольск, с. ш. № 11, 11 кл.
Н. Мацко — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Р. Мизюк — Ровно, с. ш. № 13, 11 кл.
Е. Мищенко — Черновцы, с. ш. № 6, 11 кл.
Д. Омецинский — Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
А. Орловский — Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
С. Польшин — Харьков, с. ш. № 27, 10 кл.
А. Распереза — Брест, с. ш. № 1, 11 кл.
Х. Рахимов — Шават, ФМШ, 11 кл.
А. Скабелин — Барановичи, с. ш. № 22, 11 кл.
И. Сысоев — Семипалатинск, с. ш. № 3, 11 кл.
В. Тамошюнас — Вильнюс, с. ш. № 45, 11 кл.
А. Тутов — Рига, с. ш. № 79, 11 кл.
Г. Хачатрян — с. Бердик АрмССР, 10 кл.
Е. Чашечкина — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 11 кл.
Л. Чернышев — Москва, ФМШ № 542, 11 кл.
Е. Шагаров — Грозный, с. ш. № 10, 9 кл.
А. Шехтер — Бельцы, с. ш. № 7, 11 кл.

Награждаются свидетельством и значком журнала «Квант» и книгами серии «Библиотечка «Квант» за активное участие в конкурсе:

По математике

А. Акимов — Евпатория, с. ш. № 6, 11 кл.
Д. Андриенко — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. Ахмедов — Баку, с. ш. № 2, 10 кл.
В. Барановский — Омск, с. ш. № 115, 11 кл.
А. Бородин — Донецк, с. ш. № 17, 9 кл.
Ю. Великина — Днепропетровск, с. ш. № 45, 11 кл.
А. Гурман — Одесса, с. ш. № 100, 10 кл.
Ю. Ерошенко — п. Приютово БашАССР, с. ш. № 16, 11 кл.
И. Кириллов — Усть-Каменогорск, с. ш. № 25, 10 кл.
А. Козачко — Винница, с. ш. № 6, 10 кл.
К. Мишачев — Липецк, с. ш. № 14, 10 кл.
А. Морозова — Одесса, с. ш. № 100, 11 кл.

(Окончание см. на с. 36)

Задачник «Кванта»

Задачи

М1211 — М1215, Ф1218 — Ф1222

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 мая 1990 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3 — 90» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1211» или «Ф1218». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1211 — М1215 предлагались осенью прошлого года на математической олимпиаде «Турнир городов».

М1211. Можно ли расположить в пространстве тетраэдр, шар и плоскость таким образом, чтобы площади сечений тетраэдра и сферы любой плоскостью, параллельной выбранной, были равны?

А. Анджанс

М1212. Множество всех целых чисел разбито на попарно непересекающиеся бесконечные арифметические прогрессии с положительными разностями d_1, d_2, d_3,... Может ли случиться, что

$$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\frac{1}{d_3}+\ldots<0{,}9? \qquad (*)$$

Рассмотрите два случая:

а) число прогрессий конечно;

б) число прогрессий бесконечно (при этом условие (*) означает, что сумма любого конечного числа слагаемых в левой части (*) меньше 0,9).

А. Толпыго

М1213. Докажите, что если некоторый выпуклый шестиугольник можно разрезать на N параллелограммов равной площади, то

а) он имеет центр симметрии;

б) число N делится на 3.

В. Произволов

М1214*. В некоторых клетках прямоугольной таблицы из n строк и $m>n$ столбцов расставлены звездочки так, что в каждом столбце стоит хотя бы одна звездочка. Докажите, что найдется такая звездочка, что в ее строке звездочек больше, чем в ее столбце.

А. Разборов

М1215*. Число 15 можно тремя способами разложить в сумму трех натуральных чисел так, что все 9 чисел различны:

$$15=1+6+8=2+4+9=3+5+7.$$

Для каждого натурального n обозначим через $k(n)$ наибольшее число троек натуральных чисел, дающих в сумме n и состоящих из $3k(n)$ различных чисел. Докажите, что

а) $k(n)>n/6-1$;

б) $k(n)<2n/9$;

в) $k(100)=21$;

г) $k(500)=110$.

Л. Курляндчик

Ф1218. Цилиндр массой m находится между подвижной горизонтальной поверхностью и закрепленной под углом α наклонной плоскостью (рис. 1). Коэффициент трения цилиндра о горизонтальную поверхность μ_1, о наклонную — μ_2. Горизонтальную поверхность равномерно двигают влево. Какую минимальную силу приходится для этого прикладывать?

М. Цыпин

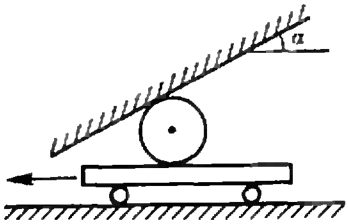


Рис. 1.

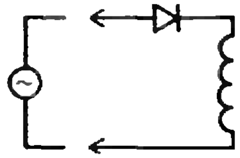


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

Ф1219. Погремушка в виде полого стального шара объемом 0,2 л содержит внутри 300 стальных шариков радиусом 1 мм. Ее трясут так, что шарики внутри непрерывно сталкиваются между собой и со стенками, издавая ужасный шум. Считая скорость погремушки равной 1 м/с, оцените число соударений между шариками за 1 минуту. Излучаемая звуковая мощность равна 10 вТ, выделением тепла при ударах пренебречь.

А. Зильберман

Ф1220. Небольшой баллончик с остатками неона для пополнения подсоединяют на короткое время к большому резервуару, где давление p в два раза выше, чем в баллончике. Баллончик отсоединяют сразу после его заполнения. Каким будет окончательное давление газа в баллончике? Теплообменом газа со стенками баллончика при его заполнении пренебречь.

Е. Бутиков

Ф1221. В прошлом веке русский ученый Б. И. Срезневский исследовал испарение капель жидкости в воздухе. Пусть это испарение происходит при постоянной разности температур за счет подвода тепла к капле от окружающей среды. Считая поток тепла на единицу поверхности шаровой капли пропорциональным разности температур и обратно пропорциональным радиусу капли, найти зависимость радиуса капли от времени. За какое время окончательно испарится капля, радиус которой уменьшился в два раза за 10 минут?

А. Стасенко

Ф1222. Катушку индуктивности с $L = 10$ Гн подключают к сети 220 В, 50 Гц последовательно с диодом (рис. 2). Нарисовать график тока в катушке в зависимости от времени. Чему равно максимальное значение тока? Как зависит вид графика от момента подключения цепи к сети?

З. Рафаилов

Решения задач

М1186—М1190, Ф1198—Ф1202

***М1186.** Будем говорить, что два четырехугольника — бумажный и картонный — подходят друг к другу, если картонный можно наложить на бумажный так, что все его вершины попадут на стороны бумажного (по одной на каждую) и при этом,*

Пусть $KLMN$ — картонный четырехугольник, вершины K, L, M, N которого лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA выпуклого бумажного четырехугольника $ABCD$.

Очевидно, что углы AKN и LKB двух бумажных треугольников с вершиной K в сумме равны углу NKL в том и только в том случае, если $\angle NKL = 90°$. Таким образом, если наши четырехугольники подходят друг к другу, то картонный четырехугольник $KLMN$ — обязательно прямоугольник.

если перегнуть четыре образовавшихся маленьких бумажных треугольника на картонный четырехугольник, то они закроют весь его в один слой.
а) Докажите, что если четырехугольники подходят друг к другу, то у бумажного либо две противоположные стороны параллельны, либо диагонали перпендикулярны.
б) Докажите, что если бумажный четырехугольник — параллелограмм, то можно сделать подходящий к нему картонный.

Задачник „Кванта"

а) Случай, когда все четыре вершины A, B, C, D после симметричного отражения совпадают (на рисунке 1 они попадают в точку O), возможен, если K, L, M и N — середины сторон четырехугольника $ABCD$. В этом случае диагонали AC и BD (пересекающиеся в точке O) взаимноперпендикулярны.

Предположим, что некоторые из этих точек не совпадают: $KB > KA$, так что после отражения A попадает в точку E, B — в точку F (E лежит на отрезке KF). При этом угол NEF должен быть покрыт при отражении треугольника NDM, так что при этом отражении D попадет в ту же точку E, что и A (а C — в ту же точку F, что и B; см рисунок 2). Следовательно,

$$\angle BKM = 2\angle LKM = 2\angle KMN = \angle KMD,$$

т. е. $AB \parallel CD$.

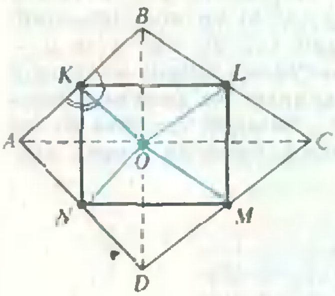


Рис. 1.

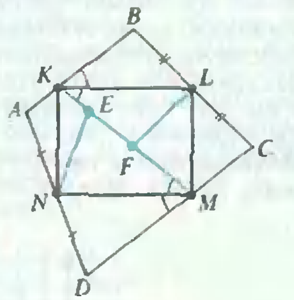


Рис. 2.

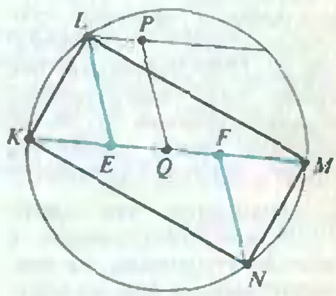


Рис. 3.

б) Покажем, как для параллелограмма со сторонами a, b ($a > b$) и углом γ между ними ($\gamma \leq 90^\circ$) построить подходящий прямоугольник $KLMN$ (такого типа, как изображенный на рисунке 2) с диагональю $KM = a$. Опишем на отрезке KM как на диаметре окружность. Из ее центра Q проведем отрезок $QP = b/2$, составляющий угол $\angle PQK = \gamma$ с отрезком KM, и через точку P проведем прямую, параллельную KM. Пусть L — точка пересечения этой прямой с окружностью (ближайшая к K), LE — отрезок, равный и параллельный PQ, NF — отрезок, симметричный LE относительно Q (рис. 3). Отразив треугольники KEL, LEM, MFN и NFK относительно сторон KL, LM, ML и NK, мы получим параллелограмм со сторонами $KE+KF = ME+MF = a$, $2LE = 2NF = b$ и углом γ, подходящий к картонному прямоугольнику $KLMN$.

Н. Васильев

M1187. Докажите, что если m четно, то все целые числа от 1 до m—1 можно выписать в таком порядке,

Числа можно расставить в таком порядке:

$$m-1,\ 2,\ m-3,\ 4,\ m-5,\ 6, \ldots,\ 1,\ m-2 \qquad (*)$$

(на нечетных местах стоят нечетные числа в порядке *что никакая сумма нескольких подряд не будет делиться на m.*

убывания, на четных местах — четные в порядке возрастания). Выпишем остатки от деления на m суммы первых k чисел ($k=1, 2,..., m$) последовательности (*):

$$m-1,\ 1,\ m-2,\ 2,\ m-3,\ 3, \ldots, \frac{m}{2}-1,\ \frac{m}{2}.$$

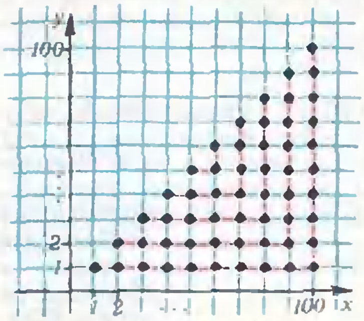
Таким образом, среди этих остатков r_k встречаются по разу все числа от 1 до $m-1$. Поскольку $r_i \neq r_k$ при любых $i<k$, сумма чисел от $i+1$ до k в указанной выше последовательности (*) не делится на m.

Н. Константинов

М1188. а) Дан 101 прямоугольник с целыми сторонами, не превосходящими 100. Докажите, что среди них найдутся три прямоугольника A, B, C, которые можно поместить друг в друга: $A \subseteq B \subseteq C$.

б) Докажите, что среди 1989 прямоугольников с целыми сторонами, не превосходящими 100, найдутся 40 прямоугольников таких, что первый можно поместить во второй, второй — в третий, ..., 39-й — в 40-й.

Каждому прямоугольнику со сторонами a и b ($a \leqslant b$) поставим в соответствие точку $(a;\ b)$ на координатной плоскости. Всевозможные точки $(x;\ y)$, где x и y — натуральные, $y \leqslant x \leqslant 100$ (см. рисунок), можно включить в 50 цепочек-«уголков», показанных на рисунке красным цветом,— так, что точки в каждой цепочке будут соответствовать прямоугольникам, которые можно вложить друг в друга*).



Теперь обе задачи решаются без труда:

а) поскольку $2 \cdot 50 < 101$, по крайней мере 3 точки из 101, соответствующей прямоугольникам, лежат в одной цепочке;

б) поскольку $39 \cdot 50 = 1950 < 1989$, по крайней мере 40 точек из 1989, соответствующих прямоугольникам, лежат в одной цепочке.

Н. Седракян

*) Замечание. Среди всех прямоугольников $(x,\ y)$, $y \leqslant x \leqslant 100$ можно указать максимум 50 попарно несравнимых: (100; 1), (99; 2),..., (51; 49), (50; 50). Существует общая теорема Дилуорта: любое конечное множество, где указан частичный порядок между некоторыми элементами, можно покрыть k упорядоченными цепями, где k — максимальное количество попарно несравнимых элементов (см. книгу «Заочные математические олимпиады». М.: Наука, 1987, с. 111).

M1189. На плоскости дано n прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку и никакие две не параллельны. Докажите, что в каждой из частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно поставить целое число, отличное от 0 и не превосходящее по модулю n, так, что по любую сторону от любой из этих прямых сумма чисел равна 0.

Приведем самое короткое решение задачи. Оно опирается на такой факт: каждую из частей, на которые данные прямые делят плоскость, можно покрасить черной или белой краской так, чтобы области, имеющие общий участок грани, имели разный цвет. (Эту раскраску можно получить «по индукции»: при добавлении прямой в одной из ограниченных ею полуплоскостей все цвета заменяются противоположными.)

Каждая точка пересечения прямых служит вершиной четырех углов — двух белых и двух черных. Напишем в них числа $+1$ (в белых) и -1 (в черных). Очевидно, сумма этих чисел в каждой полуплоскости, ограниченной любой их данных прямых, равна 0.

Теперь для каждой области просуммируем числа, которые написаны в углах,— это будут нужные целые числа, отличные от нуля: поскольку у каждой выпуклой области не больше чем n сторон, то у нее не больше чем n углов.

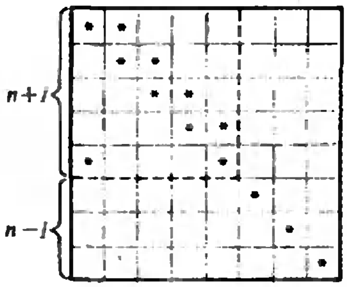
Тем самым, мы доказали такую теорему: если в каждой области, на которые n прямых делят плоскость, написано целое число, равное по модулю числу ее углов, причем знаки чисел в соседних (по отрезку или лучу) областях различны, то по каждую сторону от любой из n прямых сумма этих чисел равна 0.

Н. Константинов

M1190. а) Докажите, что если в таблице $2n\times 2n$ клеток стоят $3n$ звездочек, то можно вычеркнуть n строк и n столбцов так, что все звездочки будут вычеркнуты.*
б) Докажите, что в таблице $2n\times 2n$ клеток можно расставить $3n+1$ звездочку так, что после вычеркивания любых n строк и n столбцов останется по крайней мере одна звездочка.

а) Вычеркнем n строк с наибольшим количеством звездочек. Менее $2n$ звездочек в них быть не может — это означало бы, что в одной из этих n строк не более одной звездочки, тогда и в оставшихся n строках не более чем по одной звездочке, так что всего звездочек меньше $2n+n=3n$. Итак, вычеркнуто не менее $2n$ звездочек; оставшиеся (не более n) звездочки можно убрать, вычеркнув соответствующие столбцы.

б) Расставим звездочки так, как показано на рисунке: $2n$ — по диагонали, еще n — на пересечении i-й строки с $(i+1)$-м столбцом ($i=1, 2, \dots, n$) и последнюю — на пересечении $(n+1)$-й строки с 1-м столбцом. Предположим, что удалось убрать все эти звездочки, вычеркнув n строк и n столбцов. Пусть из них $k\leqslant n-1$ строк (и тем самым $n-1-k$ столбцов) приходятся на нижние $(n-1)$ звездочки, т. е. на последние $n-1$ строк и столбцов. Тогда среди первых $n+1$ строк вычеркнуто $n-k$. Остальные строки разбиваются на несколько зон: из $p_1,\dots, p_r$ строк ($r\geqslant 1$), $p_1+\dots+p_r=(n+1)-(n-k)=$ $=k+1$. (Мы считаем здесь, что вслед за $(n+1)$-й строкой идет первая). В этих зонах останется $(p_1+1)+(p_2+1)+$ $+\dots+(p_r+1)=k+r+1>k+1$ звездочек, стоящих в разных столбцах. Столбцов же останется $n-(n-1-k)=$ $=k+1$. Таким образом, вычеркивая столбцы, все звездочки убрать нельзя.



Задачник „Кванта"

Эта задача — частный случай такой проблемы Жиранкевича: для заданных чисел m, l, p, q, ($p<m$, $q<l$) найти наибольшее число k такое, что любые k звездочек, расставленные в клетки таблицы из m строк и l столбцов, можно убрать, вычеркнув некоторые p строк и q столбцов. (В нашей задаче доказано, что при $m=l=2n$, $p=q=n$ ответ $k=3n$.)

К. Кохась

***Ф1198.** Труба радиусом R заполнена песком до высоты H ($H>200R$). Плотность песка ρ. Найти минимальную силу давления песка на дно трубы. Известно, что этот песок на горизонтальной поверхности образует горку с предельным углом при основании γ_0 (рис. 1), причем этот угол мал ($\gamma_0\sim$ $\sim 0,1$ рад). Коэффициент трения покоя песка о материал трубы равен μ.*

Найдем сначала коэффициент трения песка о песок μ'. Рассмотрим песчинку на склоне горки с углом при основании γ (рис. 2). На нее действуют три силы: сила тяжести mg, сила нормальной реакции склона N и сила трения покоя $F_{тр}$. Из условия равенства нулю векторной суммы этих сил (условие равновесия) легко находим

$$N=mg\cos\gamma,\ F_{тр}=mg\sin\gamma=N\operatorname{tg}\gamma.$$

С другой стороны, $F_{тр\,max}=\mu' N$. Следовательно,

$$\mu'=(F_{тр}/N)_{max}=\operatorname{tg}\gamma_0\approx\gamma_0,$$

где $\gamma_0\ll 1$ — предельный (максимальный) угол при основании.

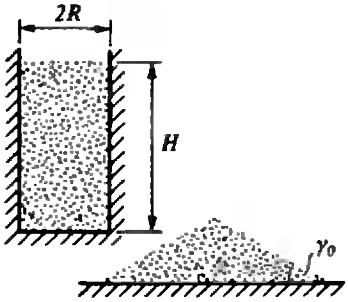


Рис. 1.

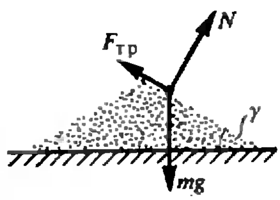


Рис. 2.

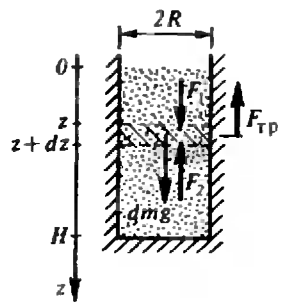


Рис. 3.

Рассмотрим теперь трубу, заполненную песком. Выделим тонкий слой песка толщиной dz (рис. 3; здесь ось Z направлена вниз, $z=H$ соответствует дну трубы). На этот слой действуют сила тяжести $dm\cdot g$, сила трения со стороны стенок $F_{тр}$, сила давления со стороны верхней части песка $F_1=\pi R^2 p(z)$ и сила давления со стороны нижней его части $F_2=\pi R^2 p(z+dz)$. Здесь $dm=\rho\pi R^2 dz$ — масса рассматриваемого слоя, $p(z)$ — давление песка на уровне z, $p(z+dz)$ — давление на уровне $z+dz$. Очевидно, что давление на дно будет минимальным, если сила трения направлена вверх и максимальна по величине.

Предположим, что $\mu<\mu'$. В этом случае максимальная сила трения, приходящаяся на единицу площади

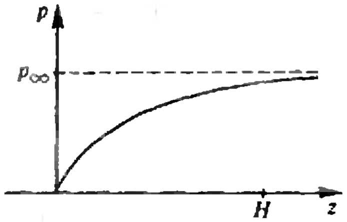


Рис. 4.

боковой поверхности, равна μp; следовательно,

$$F_{тр}=2\pi R dz\cdot\mu p.$$

Слой находится в покое, поэтому сумма проекций всех сил на ось Z равна нулю:

$$\rho g\pi R^2dz+\pi R^2p(z)-\pi R^2p(z+dz)-2\pi Rdz\cdot\mu p=0.$$

Обозначив $dp=p(z+dz)-p(z)$, получаем

$$dp/dz=-(2\mu/R)(p-p_\infty),$$

где $p_\infty=\rho gR/(2\mu)$.

Таким образом, если $p<p_\infty$, то с увеличением «глубины» z давление возрастает ($dp/dz>0$). По мере приближения p к p_∞ скорость возрастания уменьшается, так что давление асимптотически приближается к p_∞. График функции $p(z)$ с учетом граничного условия $p(0)=0$ изображен на рисунке 4. При $\mu H/(2R)\gg 1$ давление на дно $p(H)$ можно считать почти равным p_∞, т. е.

$$p(H)\approx\rho gR/(2\mu)\text{ и }F(H)\approx\rho\pi gR^3/(2\mu)\text{ при }\mu<\mu'.$$

Вернемся к предположению о том, что $\mu<\mu'$. Легко понять, что если это условие нарушается (т. е. если $\mu>\mu'$), то монослой песчинок прилипнет к стенкам трубы и остальной песок будет тереться уже об этот монослой с коэффициентом трения μ'. Следовательно, в этом случае давление на дно будет определяться именно этим коэффициентом трения:

$$p(H)\approx\rho gR/(2\mu')\approx\rho gR/(2\gamma_0)\text{ и }F(H)\approx\rho\pi gR^3/(2\gamma_0)$$
$$\text{при }\mu>\mu'\approx\gamma_0.$$

А. Семенов

***Ф1199.** Из опыта известно, что скорость волн на поверхности океана, длина которых $\lambda=10$ м, равна $v=4$ м/с. Предположим, что в океане на большой глубине есть граница раздела, выше которой находится менее соленая вода, а ниже — более соленая, так что разность плотностей воды $\Delta\rho=1$ кг/м^3. По этой границе могут бежать волны (так называемые внутренние волны). Найти скорость таких волн с длиной $\lambda=10$ м. Амплитуду волн считать малой.*

Движение жидкости и в поверхностных, и во внутренних волнах вызывается гравитационными силами. Эти силы, естественно, пропорциональны разности плотностей на границе раздела, т. е. $\Delta\rho$ для внутренних волн и ρ для поверхностных ($\rho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды в верхних слоях океана). Кроме того, в случае внутренних волн в движение приводится вдвое большая масса воды, поскольку движется вода, находящаяся по обе стороны от границы раздела. Тогда для ускорений одинаково расположенных частиц жидкости в обеих волнах получаем

$$\frac{a_{пов}}{a_{вн}}=\frac{F_{пов}/m_{пов}}{F_{вн}/m_{вн}}=\frac{2\rho}{\Delta\rho}\approx 2000.$$

С другой стороны, если движение в поверхностной волне происходит, например, в k раз быстрее, то все скорости в ней будут в k раз больше, а любое изменение движения займет в k раз меньше времени. Это означает, что ускорение, которое является отношением изменения скорости ко времени этого изменения, будет больше в k^2 раз. Отсюда

$$k=\sqrt{\frac{a_{пов}}{a_{вн}}}=\sqrt{\frac{2\rho}{\Delta\rho}}.$$

Окончательно

$$v_{\text{вн}} = \frac{v_{\text{пов}}}{k} = v \cdot \sqrt{\frac{\Delta p}{2\rho}} \approx 0{,}09 \text{ м/с}.$$

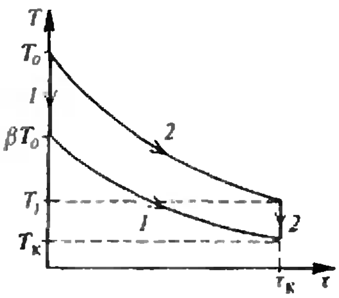
В. Геогджаев

***Ф1200.** На столе стоят два одинаковых стакана, в один из которых налит горячий чай. Температура чая t_0. Чай требуется охладить до температуры $t_к$. Это можно сделать двумя способами:*

1) сразу перелить чай во второй стакан и ждать, пока он остынет до температуры $t_к$;

2) ожидать, пока чай остынет до некоторой температуры t_1 такой, что после переливания во второй стакан температура чая сразу окажется равной $t_к$.

Какой способ быстрее? Известно, что теплоотдача стакана с чаем пропорциональна разности температур стакана и окружающей среды, теплообмен между чаем и стаканом происходит очень быстро. Теплоемкость стакана C_0, теплоемкость чая C.



Обозначим разность температур чая и окружающей среды через T:

$$T = t_{\text{чая}} - t_{\text{окр.ср.}}$$

и для краткости будем называть T температурой. Тогда уравнение изменения температуры T чая со временем τ, согласно условию задачи, можно записать в виде

$$dT/d\tau = -\alpha T, \qquad (*)$$

где $\alpha > 0$ — постоянный коэффициент пропорциональности. Из условия задачи также следует, что если до переливания чая из одного стакана в другой температура была T, то после переливания она станет $CT/(C+C_0) = \beta T$, где β — постоянный коэффициент.

Теперь рассмотрим процессы 1) и 2). Для первого процесса запишем начальное условие:

$$T^{(1)}(0) = \beta T_0 \text{ (сразу после переливания)}$$

и уравнение изменения температуры со временем:

$$dT^{(1)}/d\tau = -\alpha T^{(1)}.$$

Для второго процесса введем новую переменную $T' = \beta T^{(2)}$ и запишем соответствующие равенства:

$$T'(0) = \beta T_0,$$

$$dT'/d\tau = \beta dT^{(2)}/d\tau = \beta(-\alpha T^{(2)}) = -\alpha T'.$$

Одинаковым уравнениям и одинаковым начальным условиям соответствуют одинаковые решения. Поэтому в произвольный момент времени τ

$$T'(\tau) = T^{(1)}(\tau).$$

Пусть в некоторый момент времени $\tau_к$ температура чая в первом процессе достигла значения $T_к$, т. е.

$$T^{(1)}(\tau_к) = T_к.$$

Найдем, какой станет температура во втором процессе, если в момент времени $\tau_к$ перелить чай из одного стакана в другой:

$$T^{(2)}(\tau_к)_{\text{после}} = \beta T^{(2)}(\tau_к)_{\text{до}} =$$

$$= \beta T'(\tau_к)/\beta = T'(\tau_к) = T^{(1)}(\tau_к) = T_к.$$

Итак, мы получили, что для обоих способов охлаждения чая требуется одно и то же время. Следовательно, переливать чай из одного стакана в другой можно в любой момент времени в промежутке от 0 до $\tau_к$ (см. рисунок).

З а м е ч а н и е. Этот результат можно получить несколько по-другому. Переписав основное уравнение (*)

в виде $dT/T = -\alpha d\tau$ (или решив его), легко увидеть, что отношение $T(\tau+\Delta\tau)/T(\tau)$ не зависит от $T(\tau)$. Обозначим это отношение через B $(\Delta\tau)$ и запишем

$$T^{(1)}(\tau_к) = B(\tau_к)\beta T_0 = \beta B(\tau_к)T_0 = T^{(2)}(\tau_к).$$

К. Бедов

***Ф1201.** Имеется нелинейный электронный прибор $\tilde{R}$. На рисунке 1 приведен график зависимости тока через прибор от напряжения на нем (на участках 1—2 и 3—4 наклон графика очень велик). Собрали цепь, состоящую из $\tilde{R}$, катушки с индуктивностью L и батарейки с ЭДС, равной U_0 (прибор включают с «правильной» полярностью, соответствующей графику). Построить график зависимости тока в цепи от времени и найти период колебаний тока.*

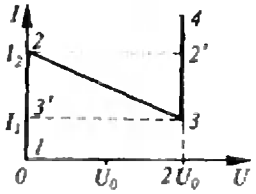


Рис. 1.

После замыкания цепи электронный прибор начнет работать на участке 1—2 его характеристики. Уравнение изменения тока в цепи со временем будет иметь вид

$$L\,dI/dt = U_0,$$

или

$$LI = U_0 t.$$

Начиная с момента $t_1 = LI_2/U_0$, когда состояние прибора изобразится точкой 2, дальнейшее увеличение тока через прибор станет невозможным. При этом напряжение на катушке будет падать, а на приборе расти. В результате прибор очень быстро совершит переход $2 \to 3 \to 2'$, так как состояние системы на участке 2—3 неустойчивое. Поскольку ток в катушке мгновенно измениться не может, $I_{2'} = I_2$ (во время перехода ток поддерживается постоянным за счет так называемых паразитных емкостей системы).

После того как система окажется в состоянии 2', уравнение изменения тока в катушке со временем примет вид

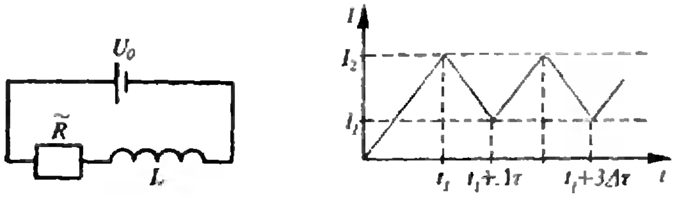


Рис. 2.

$$L\,dI/dt = U_0 - 2U_0 = -U_0,$$

или

$$L\Delta I = -U_0\Delta t.$$

Через время $\Delta t = L(I_2 - I_1)/U_0$ система окажется в состоянии 3, из которого она очень быстро перейдет в состояние 3', после чего через тот же промежуток Δt она придет в состояние 2, и процесс повторится.

Период повторения процесса будет равен

$$T = 2\Delta t = 2L(I_2 - I_1)/U_0.$$

График зависимости тока в цепи от времени приведен на рисунке 2.

К. Бедов

***Ф1202.** При электрическом разряде в разреженном неоне (Ne) при комнатной температуре очень небольшая часть атомов неона распадается на электроны и ионы (масса M атома неона в 4×10^4 раз больше массы m электрона). Длина свободного пробега электронов (т. е. среднее расстояние, которое электрон проходит без соударений) $l=0{,}1$ мм. Газ находится в электрическом поле с напряженностью $E=10$ В/см. Оценить «температуру» электронов, соответствующую их средней кинетической энергии. Постоянная Больцмана $k=1{,}38\times10^{-23}$ Дж/К, заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.*

Поскольку, по условию задачи, ионизируется лишь незначительная часть атомов неона, можно считать, что подавляющее большинство столкновений электронов с атомами являются упругими. Из законов сохранения энергии и импульса легко получить, что при лобовом упругом соударении с покоящимся атомом неона электрон теряет энергию

$$\Delta W_1=\frac{4m}{M}\,\frac{mv^2}{2},$$

где v — скорость электрона перед столкновением (мы учли, что $m\ll M$). При косом упругом ударе потеря энергии электрона будет того же порядка.

Предположим, что между каждыми двумя ударами электрон под действием электрического поля движется равноускоренно с ускорением $a=eE/m$ в течение времени $\tau=l/v$, причем непосредственно после первого соударения направление его скорости может оказаться любым. Тогда за время между ударами электрон приобретает энергию

$$\Delta W_2=eE\,\frac{a\tau^2}{2}=\frac{(eEl)^2}{2mv^2}.$$

Скорость электрона, а значит, и его кинетическая энергия, не будет изменяться, если $\Delta W_1=\Delta W_2$, или

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{eEl}{4}\sqrt{\frac{M}{m}}.$$

Соответствующая «температура» электронов

$$T=\frac{mv^2}{3k}=\frac{eEl}{6k}\sqrt{\frac{M}{m}}\approx4\cdot10^4\ \text{К}.$$

Д. Купцов

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

(Начало см. на с. 26)

Д. Поперечный — Хабаровск, с. ш. № 2, 10 кл.
Л. Порохня — Павлодар, с. ш. № 3, 11 кл.
И. Селищев — п. Манченки Харьковской обл., 11 кл.
А. Скороход — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
В. Слюсарчук — Ровно, с. ш. № 11, 10 кл.
А. Эгамов — Гороховец, с. ш. № 1, 11 кл.

По физике

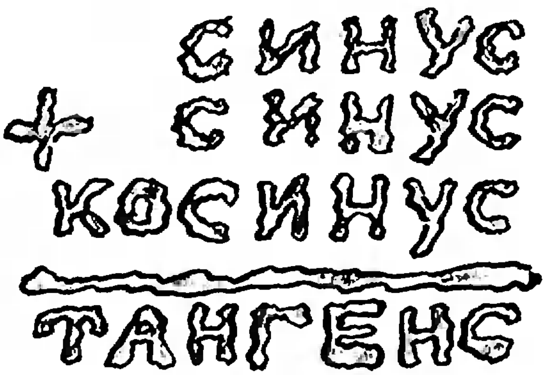
С. Антипин — Северодвинск, с. ш. № 17, 11 кл.
Р. Баскаков — Красноярск, с. ш. № 161, 11 кл.
В. Бакулин — Новосибирск, ФМШ при НГУ, 10 кл.
И. Башук — Великие Мосты Львовской обл., 11 кл.
Р. Бучко — Черновцы, с. ш. № 23, 10 кл.
Г. Важенин — Свердловск, с. ш. № 9, 11 кл.
В. Высоцкий — Киев, с. ш. № 77, 11 кл.
Е. Гендин — Киев, с. ш. № 206, 11 кл.
А. Гринчук — д. Мохро Брестской обл., 11 кл.
Д. Грязных — Челябинск, с. ш. № 127, 11 кл.
С. Демба — Старый Оскол, с. ш. № 16, 10 кл.
Н. Демчук — Здолбунов, с. ш. № 1, 11 кл.
М. Дорохова — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 11 кл.
М. Зеленфройнд — Бобруйск, с. ш. № 2, 11 кл.
К. Кладько — Харьков, с. ш. № 11, 11 кл.
Е. Климчук — Кузнецовск, с. ш. № 1, 10 кл.
А. Мытько — Минск, с. ш. № 156, 8 кл.
И. Пилюгик — Алма-Ата, РФМШ, 11 кл.
В. Полищук — Канев, с. ш. № 4, 11 кл.
С. Поторочин — Ижевск, с. ш. № 41, 11 кл.
Е. Призант — Одесса, с. ш. № 36, 11 кл.
Н. Рябова — Харьков, с. ш. № 27, 11 кл.
В. Силаев — Брест, с. ш. № 1, 10 кл.
С. Тимощук — с. Черница Ровенской обл., 9 кл.
А. Усинский — с. Птичья Ровенской обл., Вербская с. ш., 11 кл.
А. Фридлянд — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
Д. Чокин — Алма-Ата, РФМШ, 11 кл.
С. Шинкевич — Березники, с. ш. № 3, 11 кл.
И. Шуляк — Киев, ФМШ при КГУ, 10 кл.
К. Шурунов — Куйбышев, с. ш. № 63, 10 кл.
М. Энтин — Тула, с. ш. № 73, 11 кл.

„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Из A в B вышел путник. Одновременно с ним из B в A вышел второй путник. Они шли равномерно, но с разными скоростями. В момент встречи первому оставалось идти еще 16 часов, а второму — 9 часов. Через сколько часов после выхода они встретились?

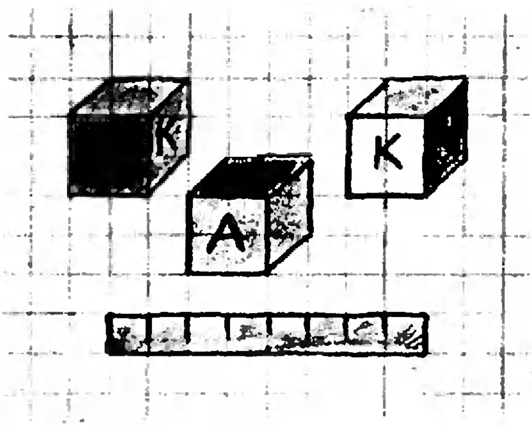
2. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.



3. Выпишем цифры от 0 до 9 подряд: 0, 1, 2, 3, ..., 9 и рассмотрим последовательность сумм двух соседних цифр: 1, 3, 5, 7, ..., 17. В этой последовательности числа увеличиваются на 2. Расположите цифры 0, ..., 9 таким образом, чтобы в образовавшейся последовательности сумм соседние числа увеличивались на 1.

4. Найдите все двузначные числа, равные сумме куба числа единиц и квадрата числа десятков.

5. Имеется три одинаковых детских кубика и линейка. Как без всяких вычислений измерить большую диагональ кубика?



Первая задача принадлежит известному английскому популяризатору математики Льюису Кэрроллу; остальные задачи нам предложили А. Савин, Н. Авилов, Н. Антонович, И. Нагель.

ЭЛЕКТРИЗАЦИЯ ЧЕРЕЗ ВЛИЯНИЕ

В. ТИХОМИРОВА

Могут ли два одноименно заряженных тела притягиваться друг к другу? Можно ли с помощью одного заряженного тела зарядить другое тело так, чтобы его заряд был больше заряда первого тела?

Чтобы ответить на эти вопросы, давайте разберемся в одном интересном физическом явлении — явлении электростатической индукции, или, другими словами, электризации тел через влияние.

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 1 за 1975 год.

Рассмотрим такой опыт. К шарику *A*, заряженному положительным зарядом q_A, подносится незаряженный металлический шар *B* (рис. 1). При этом на поверхности шара *B* появля-

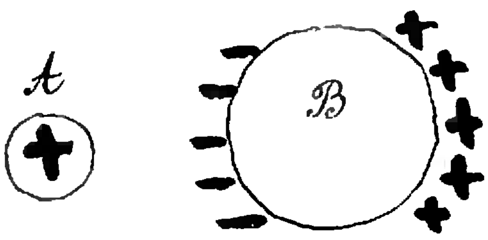


Рис. 1.

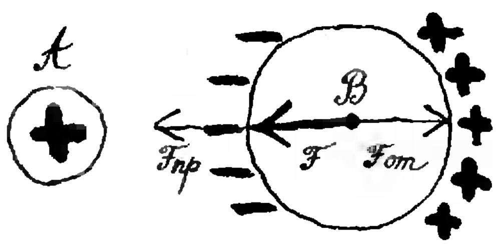


Рис. 2.

ются заряды: на ближней к шарику A стороне отрицательные, а на дальней — положительные. В этом можно наглядно убедиться, если шариком электроскопа касаться соответствующих участков поверхности шара B. Объяснить такое распределение зарядов нетрудно. Дело в том, что свободные электроны, которые раньше были равномерно распределены по всему шару B, под влиянием зарядов шарика A приходят в движение и перераспределяются по шару так, что слева их оказывается больше, чем справа. Таким образом, в левой части шара индуцируется, т. е. наводится, отрицательный заряд $-q_B$, а в правой части — положительный заряд $+q_B$. В этом и заключается явление электростатической индукции. Заметим кстати, что в нашем случае величина наведенного заряда q_B, конечно, меньше величины наводящего заряда q_A, поскольку влияние наводящего заряда распространяется и на другие окружающие его тела, где тоже индуцируются электрические заряды.

Между заряженными телами всегда действует электрическая сила. Так будет и с шарами A и B. Точнее сказать, в этом случае возникают две силы — сила притяжения $F_{пр}$ между шариком A и левой частью шара B и сила отталкивания $F_{от}$ между шариком A и правой частью шара B (рис. 2). Поскольку отрицательно заряженная часть находится ближе к шарику A, сила $F_{пр}$ больше силы $F_{от}$, и в результате шары будут притягиваться друг к другу под действием результирующей силы $F=F_{пр}-F_{от}$.

Что изменится, если шар B предварительно зарядить некоторым зарядом q'_B, причем тоже положительным? Конечно, все прежние рассуждения о наведении зарядов остаются в силе, но теперь надо учесть еще взаимодействие зарядов q_A и q'_B. Появляется еще одна сила $F'_{от}$ — сила отталкивания зарядов q_A и q'_B. Окончательный результат будет зависеть от соотношения между величинами сил F и $F'_{от}$, вернее, от соотношения между величинами зарядов q_B и q'_B, так как чем больше величина заряда, тем больше сила электрического взаимодействия.

Если величина наведенного заряда q_B окажется больше величины имеющегося на шаре заряда q'_B, то в итоге одноименно заряженные шары все-таки будут притягиваться. Когда это возможно? Мы уже говорили о том, что величина наведенного заряда на проводнике меньше величины влияющего заряда. Поэтому только если заряд q_A намного больше заряда q'_B, может оказаться, что величина заряда q_B будет больше заряда q'_B.

Итак, два одноименно заряженных тела могут притягиваться друг к другу, но для этого заряд одного из них должен быть намного больше, чем заряд другого.

Мы показали, что под влиянием заряженного тела на проводнике

(Окончание см. на с. 42)

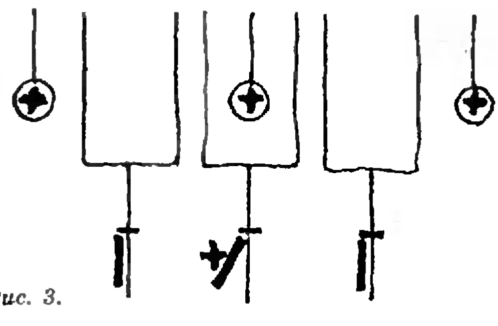
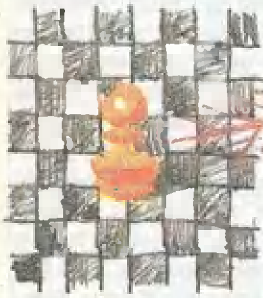


Рис. 3.

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на постоянное число $q \neq 0$. Это число называют знаменателем прогрессии. Таким образом, всякая геометрическая прогрессия имеет вид:

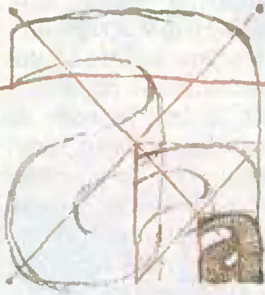


$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ \ldots,\ b_1q^{n-1},\ \ldots$$

Одна из самых старых задач на геометрическую прогрессию — задача о зернах на шахматной доске. По преданию, индийский царь Шерам повелел выдать изобретателю шахмат Сете следующее количество зерен: 1 — за первую клетку, 2 — за вторую, 4 — за третью и т. д. За каждую следующую клетку — вдвое больше, чем за предыдущую. Напомним, что на шахматной доске 64 клетки.

Эту задачу решал в своей книге «Памятники минувших поколений» среднеазиатский математик аль-Бируни (973—1048). Он заметил, что в условиях задачи количество зерен на k-м поле на единицу больше количества зерен на всех $k-1$ предыдущих клетках. Аль-Бируни получил верный ответ: 18 446 744 073 709 551 615 зерен.

Другой знаменитой задачей на геометрическую прогрессию является задача, известная еще в Древнем Египте, появившаяся в русском фольклоре в следующем виде:



«Шли семь старцев,
У каждого старца
по семи костылей,
На каждом костыле
по семи сучков,
На каждом сучке
по семи кошелей.
В каждом кошеле
по семи пирогов,
А в каждом пироге
по семи воробьев.
Сколько всего?».

Под словом «всего» подразумевается количество старцев, костылей, сучков, кошелей, пирогов и воробьев вместе.

Общая формула нахождения суммы n членов геометрической прогрессии —

$$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$$

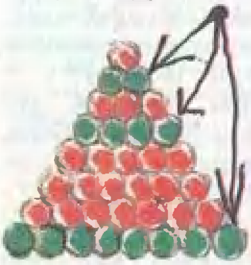
— содержится в девятой книге знаменитых «Начал» древнегреческого математика Евклида. Там приведен и вывод этой формулы.

В рассмотренных примерах знаменатель геометрической прогрессии больше единицы и ее члены стремительно возрастают с возрастанием номера. Если же знаменатель по модулю меньше единицы, то члены прогрессии, взятые по модулю, будут убывать, причем сумма всех членов такой бесконечной прогрессии будет конечным числом.

Вот как считал сумму убывающей геометри-

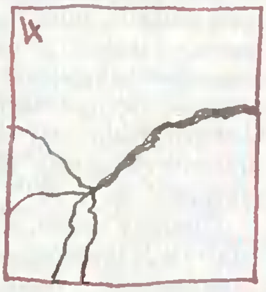
ческой прогрессии Архимед. Пусть
$x=b_1+b_1q+b_1q^2+\dots$
Тогда $x=b_1+q(b_1+b_1q+b_1q^2+\dots)=b_1+qx$.
Отсюда
$$x=\frac{b_1}{1-q}.$$

В жизненной практике геометрическая прогрессия появляется в первую очередь в задаче об исчислении так называемых «сложных процентов». Если положить деньги на срочный вклад в сберегательный банк, то через год вклад увеличится



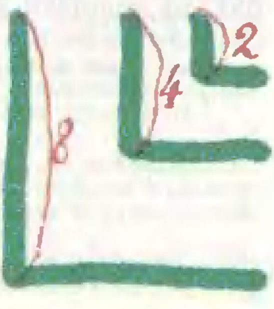
на 3 % от исходной суммы, т. е. новая сумма будет равна вкладу, умноженному на 1,03. Еще через год уже эта сумма увеличится на 3 %, т. е. вновь умножится на 1,03. За 20 лет сумма на сберкнижке увеличится в $(1{,}03)^{20}\approx$ $\approx 1{,}8$ раза.

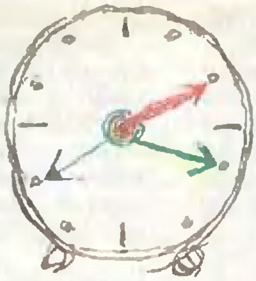
Если процент будет больше, то и результат будет резко расти. Так при 50 % годовом увеличении за 10 лет сумма увеличится в $(1{,}5)^{10}\approx 55{,}7$ раза. Под такой процент давали деньги ростовщики в Англии в XIII веке.



Это вызывало страшное недовольство. Издавались законы, ограничивающие процент. Король Генрих VII даже совсем отменил взимание процентов, что привело в упадок как банковское дело, так и

промышленность, лишившуюся возможности получения кредитов. В конце концов взимание процентов было разрешено, но не должно было быть большим 10 %.



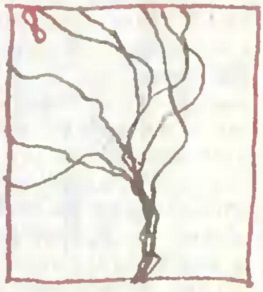


Еще один пример геометрической прогрессии — изменение массы радиоактивного вещества со временем. Известно, что за единицу времени такое вещество теряет определенную часть своей массы (она переходит

в другое вещество и энергию). Для каждого радиоактивного вещества определяется величина T — время периода полураспада. Ясно, что массы нераспавшегося вещества в моменты 0, T, $2T$, $3T$,... будут образовы-

вать бесконечно убывающую геометрическую прогрессию.

Почему геометрическая прогрессия названа «геометрической»? Видимо потому, что каждый ее член, кроме первого, равен среднему геометрическому соседних с ним членов: $b_n=\sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$. А та-



кое среднее названо геометрическим, поскольку оно является стороной квадрата, равновеликого прямоугольнику, стороны которого имеют длины, равные тем величинам, от которых берется среднее.

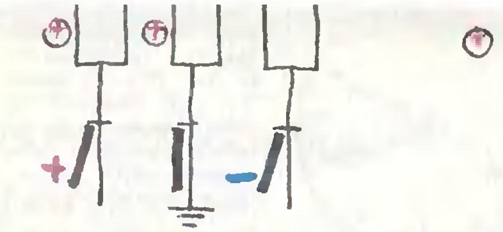


Рис. 4.

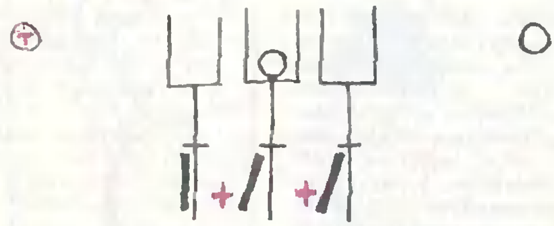


Рис. 5.

можно навести электрические заряды, но при этом проводник в целом остается электрически нейтральным (рис. 3). А нельзя ли его зарядить по-настоящему, так чтобы суммарный заряд не был равен нулю? Оказывается, можно, и даже совсем просто. Для этого достаточно проводник в присутствии заряженного тела заземлить на некоторое время, а затем убрать и заземление, и заряженное тело (рис. 4). При этом знак заряда проводника будет противоположен знаку заряда тела. *Действительно*, при заземлении свободные электроны под влиянием положительного заряда на теле приходят из земли и остаются на проводнике, заряжая его в целом отрицательно.

Величину наведенного заряда можно существенно увеличить, практически приблизив ее к величине наводящего заряда, если заряженное тело поместить внутрь длинного металлического цилиндра (или шара) с небольшим отверстием. В этом случае влияние на другие тела почти исключено, поэтому на внутренней поверхности цилиндра (или шара) наведется заряд, по величине практически равный заряду шарика, но противоположный по знаку, а *на наружной поверхности* — такой же и по величине, и по знаку. Если заряженным телом коснуться внутренней стенки цилиндра, противоположные по знаку заряды нейтрализуются, и на цилиндре *останутся заряды того же знака*, что были на заряженном теле (рис. 5). Таким образом можно практически целиком передавать заряд с одного тела на другое.

Теперь попробуем ответить и на второй вопрос, поставленный в самом начале. Пусть у нас имеются: заряженный шарик A, незаряженный шарик B, *полый металлический* шар и электроскоп, на котором мы хотим накопить заряд бо́льший, чем заряд шарика A.

Прежде всего зарядим по индукции шарик B (естественно, зарядом противоположного знака). Внесем на некоторое время шарик B внутрь заземленного шара, а затем уберем и *заземление, и шарик* B. На шаре останется заряд, равный по величине заряду шарика B, но противоположный ему по знаку, т. е. совпадающий со знаком заряда шарика A. Теперь передадим этот заряд электроскопу. Если проделать такую операцию многократно, то на электроскопе, действительно, можно будет получить заряд *того же знака*, что и исходный, но значительно бо́льший по величине.

В заключение попробуйте ответить еще на два вопроса.

1. Незаряженный проводящий шарик C с помощью длинного гибкого проводника присоединили к левой части шара B (см. рис. 2). В результате на шарике появились *положительные заряды. Почему?*

2. На электроскопе имеется небольшой положительный заряд. Если к шарику электроскопа приближать сильно наэлектризованную палочку, несущую большой отрицательный заряд, то листочки электроскопа будут сначала опадать, а потом опять расходиться. Как это можно объяснить?

Человек за бортом

(Начало см. на с. 25)

после имитации невесомости на самолете-тренажере: «... У меня внезапно возникло ощущение стремительного падения вниз, и мне показалось, что все кругом рушится, разваливается и разлетается в стороны. Меня охватило чувство ужаса, и я не понимал, что вокруг происходит». А ведь вокруг были всего лишь борта салона самолета...

Пять раз удалялся Леонов от корабля и вновь возвращался к нему. Самолетные тренировки сыграли свою роль: движения выполнялись легко, хотя и не сразу ему удалось стабилизировать положение тела. Какое-то время его разворачивало вбок и назад. Да с возвратом в ШК произошла заминка — никак не удавалось войти, мешала кинокамера, которая все время пыталась улететь в космос.

Выход Леонова в открытое пространство стал хорошей наукой для всех последующих подобных операций. Стало ясно, что для работы нужна опора, перемещаться можно и с помощью рук, а лучше — приспособлений (впоследствии на «Джемини» использовали специальный пистолет, а затем пришло и время «такси»).

... Вот так благополучно начался полет Беляева и Леонова на орбите, так он и продолжился. И ничто не предвещало драматического окончания. Однако, когда космонавты приступили к заключительным операциям, выяснилось, что вышла из строя автоматика, отвечающая за ориентацию корабля. Это был первый случай, когда космонавтам пришлось вручную осуществлять сход с орбиты. П. Беляев блестяще справился с задачей, но из-за лишнего витка корабль приземлился далеко от намеченного места посадки, в тайге. Была зима, и пробиться к нему оказалось не так-то просто. Только еще через двое суток закончилась эта космическо-земная одиссея.

В. Николаев

Слово, буква, число

По-видимому, нет человека, который бы не слышал высказываний «Математика — язык науки», «Математика — язык человеческой культуры». Действительно, математика имеет некоторые языковые черты. В то же время и наука о языках — лингвистика — использует в своих исследованиях математические методы. Разумеется, лингвистика не сводится к математике: у нее свой предмет исследования, и подходы к исследованию во многом отличны от математических, тем не менее начать знакомство с различными лингвистическими явлениями и методами лингвистического анализа можно почти что с нуля.

Попробуйте решить три задачи по лингвистике. Задачи подобного типа предлагаются на олимпиадах по лингвистике и математике, проводимых Московским университетом с 1965 года.

Решения задач — в одном из следующих номеров.

Язык конго

Даны записи некоторых дат на языке конго. (Конго — один из основных языков Народной Республики Конго. Относится к группе языков банту.)

3 января	kilumbu ya tatu ya ngonda mosi
8 марта	kilumbu ya nana ya ngonda tatu
18 октября	kilumbu ya kumi na nana ya ngonda kumi
1 ноября	kilumbu ya mosi ya ngonda kumi na mosi

Переведите на русский язык:

kilumbu ya kumi na tatu ya ngonda nana

и на язык конго:

10 марта.

Русские буквы

Даны некоторые числа в системе записи, которая использовалась в русской письменности до начала XVIII века:

ФЛВ — 532, ТЛЕ — 335, РКВ — 122,
ФМД — 544, ХМЕ — 645.

Определите, каким числам соответствовали записи: ХКД, СЛВ, ТЛГ.

Мартовские иды

Даны некоторые даты и их древнеримские обозначения:

1 мая	KAL·MAI
16 сентября	A·D·XVI·KAL·OCT
1 декабря	KAL·DEC
?	A·D·III·KAL·APR
28 сентября	A·D·IV·KAL·OCT
23 октября	A·D·X·KAL·NOV
20 апреля	?
?	A·D·XIII·KAL·NOV
27 июля	A·D·VI·KAL·AVG
29 ноября	A·D·III·KAL·DEC

Заполните пропуски.

ЦИФЕРТОН

С. Сайкс (США)

Хейес потыкал пальцем в клавиши — никакого результата.

— Не знаю, стоит ли тебе показывать... Представь — все в стране справились с четвертым уровнем и ходят, как лунатики, с остекленелыми глазами.

— У твоего сына остекленелые глаза?

Дэн потянулся и включил игру. Вспыхнул красный огонек — раздался мелодичный звук. Хейес нажал на красную клавишу.

— Не могу сказать, что остекленелые, но глаза у него... какие-то другие. Такое чувство, будто оттуда выглядывает кто-то чужой — кто гораздо старше и куда разумнее меня. Прямо в дрожь бросает.

— Не мешай. Я должен сосредоточиться,— сказал Хейес.

Подошел контролер.

— А, «Цифертон»,— ухмыльнулся он.— У моего парня тоже есть. Самая распроклятая игра из всех, что я видел. Малыш бьется над четвертым уровнем, а ведь ему всего семь лет. До того смышленый, что меня порой оторопь берет.

Дэна неожиданно прошиб холодный пот. Где-то в глубинах памяти вертелись обрывки стихотворения... Что-то о музыке и детях... О разноцветной одежде и...

— Сделано! — возликовал Хейес.— Одиннадцать подряд! Теперь второй уровень.

— Флейтист из Гаммельна! — громко сказал Дэн.

— Что?

— Электронный Крысолов. «Цифертон» — это...— Он замолчал. Чушь. Абсолютная, несомненная чушь.— Ларри, я сегодня опоздаю. Предупреди Уилсона. Мне нужно зайти в библиотеку, хочу кое-что выяснить.

Вот оно:

И плащ его страиный, как платье шута,
Раскрашен был в желтый и красный цвета...
...Зеленые искорки в синих очах —
Так соль полыхает, коль бросить в очаг...
...Трех нот не успел он извлечь
(таких
волшебных трезвучий еще не слыхали
на этом виды видавшем свете),
Как слышит шуршанье, галдеж, щебетанье,
И визг, и толканье, и ног топотанье,
Сабо стукотню, и смешную возню,
И хлопанье рук, языков болтовню,
Словно птичник проснулся к пригожему
дню,—
Выбежали ребятишки.
И все-все мальчишки, и все-все девчонки —
Кожа — что бархат, как лен — волосенки,
Жемчужные зубки, живые глазенки —
Помчались вприпрыжку и вскачь, хохоча,
Влекомые дивной игрой трубача...*)

Дэн откинулся на спинку стула и пробежался пальцами по игре. В сущности, игра ли это? А может, нечто большее? То ли дети развлекаются обычной детской игрушкой, то ли... их обучают? И если так — то кто и зачем? Можно ли считать серии вспышек и звуков безобидными случайными комбинациями, или это некий код, который, начав с азов, поднимается к высшим ступеням передачи бесконечно сложной информации? Дэн снял с полок несколько книг по медитации и гипнозу и записал их на себя.

— «Медитация и карма»,— читал вслух Хейес, перебирая стопку книг на столе Дэна.— «Формы сознания. Программирование и метапрограммирование человеческого биокомпьютера»... Что, Морган, решил переключиться с романов ужасов на чтиво полегче?

Окончание. Начало см. в № 2.

*) Отрывок из стихотворения английского поэта Роберта Браунинга (1812—1889) «Дудочник из Гаммельна», где в поэтической форме излагается легенда о Крысолове. (*Примеч. перев.*)

— Может быть, есть смысл порыться в научной фантастике...— пробормотал Дэн, оторвавшись от книги «Гипноз и альфа-волны».— А еще лучше — сказки. Бред какой-то!..

Хейес отодвинул книги и присел на край стола. Посередине лежал брюхом кверху распотрошенный «Цифертон», отдельно валялись батарейки.

— Зачем ты его раскурочил? — спросил Хейес.— Решил содрать пиратскую копию? Не выйдет. Эта штука запатентована.

— Я не могу залезть внутрь.

— Внутрь чего?

— Этой... штуки.— Дэн ткнул в игру отверткой.— Хотел посмотреть на ее внутренности. Совершенно немыслимо ее разобрать, не испортив. Можно лишь вынуть батарейки. И все. Кажется, я скоро возьмусь за молоток.

Хейес поцокал языком.

— У тебя комплекс неполноценности, что ли?

Дэн откинулся на стуле и заложил руки за голову.

— Ларри, я связался с фабрикой игрушек, где делают эти штуки. Хотел поговорить с изобретателем, кто бы ее ни изобрел — дьяволы, бесы ли. Знаешь, что мне ответили? Ее *никто* не изобретал. Ее изобрел *компьютер.*

— Компьютер породил маленьких компьютерят? — Хейес со значительным видом склонил голову.— Что ж, этого следовало ожидать. Только дай волю — и глазом не моргнешь, как они уже помешаны на сексе.

— Главное, никто не знает, кто ввел в компьютер информацию, с тем чтобы тот выдал... игру. Похоже, спросить за это не с кого.

— Ну и что? Это чертовски занятная штуковина. Их расхватывают так быстро, что магазины не успевают делать запасы. Я обошел пять магазинов, хотел купить «Цифертон» сыну, и везде все распродано. Меня поставили на очередь, черт побери! Ты представляешь: очередь за игрой! Обещали позвонить.

Дэн наклонился и медленно поставил батарейки на место.

— *Если* это игра,— произнес он.

— Что ты имеешь в виду?

— Ларри... предположим, что ты... ну, скажем, миссионер. Твое задание — отправиться в джунгли, отыскать самых примитивных, диких, суеверных, подозрительных и гнусных язычников на Земле, извлечь их из каменного века и приобщить к веку двадцатому. Ты должен дать им образование, обучить их, ознакомить с современной технологией, столь далекой от их понимания, что само твое появление пугает их до смерти. Но это твоя работа, твой долг. Потому что в невежестве они очень скоро перебьют друг друга. Они не знают, как... выжить в их отсталом маленьком мирке. Они погрязли в собственном дерьме. Они невероятно жестоки по отношению друг к другу. Их племенные обычаи столь варварские, что они убивают себе подобных из одного лишь страха и суеверия. Схватываешь?

Хейес поднялся и пересел в кожаное кресло.

— Веселенький вышел бы у меня уик-энд!

— Пожалуйста, будь серьезней. Это всего лишь гипотеза. Предположение. Как бы ты приступил к заданию?

— Ну... по правде сказать, я бы на это не пошел.— Хейес пожал плечами.— По-моему, их лучше оставить в покое. Я признаю закон естественного отбора. Может быть, так и надо, чтобы они поубивали друг друга. Может быть, выживание не для них.

Дэн задумчиво тер «Цифертон», лежащий у него на коленях, словно это была волшебная лампа Алладина.

— Нет. Твоя личная философия в данном случае неприменима. Ты обязан спасти их от самих себя. С чего начать? Учти, завидев тебя, они убегают. Ты даже не можешь приблизиться.

— Я знаю их язык?

Дэн нахмурился.

— Ну, *кое-что* ты о них знаешь, потому что наблюдал исподтишка, тайно изучал их... годами. И тебе кое-что известно об их... способе общения. Однако словарь очень скудный, ограниченный. Больше толку, если они выучат *твой* язык. Как ты станешь учить их, если не можешь приблизиться в открытую?

Хейес обследовал заусеницу и полез в карман за ножничками.

— Дэн, зачем ты все это спрашиваешь? Хочешь сказать, что собираешься вступить в Корпус мира?

— Ну, пусть так. Я объясню после... если потребуется.

— Что ж, давай, прикинем. Мне придется общаться с ними как-то так, чтобы не пугать их.

Дэн кивнул.

— Хорошая идея. Как?

— Я бы выяснил... чем их можно заинтересовать. Что им нравится. Может, их хлебом не корми, дай только какие-нибудь безделушки... или зеркальца... или инструменты... или...

— Игрушки?

— Да. Что-то в этом роде. Я бы, пожалуй... оставил все барахло под каким-нибудь деревом, они привыкли бы к месту и начали растаскивать подарки... Оставлял бы им еду... Ну, и в том же духе.

— А сам не показался бы?

— Поначалу нет. Потом, скажем... оставил бы под деревом свою фотографию.— Хейес просиял от внезапного озарения.— Вот что я сделал бы! Фотография! Потом, позднее, покажусь и сам... На минуточку, на расстоянии. Затем появлюсь ближе. И так далее.

Дэн продолжал поглаживать «Цифертон».

— Не забывай, это дикари. Они могут убить тебя просто от страха. Тебе нужно ввести их в современный мир, а времени у тебя не так уж и много. Каждый день они убивают друг друга, деревни тонут в грязи. Их одолевают болезни.

— Не могу представить, кто станет возиться с ними,— фыркнул Хейес.— О господи! Ты хочешь навести меня на мысль. Понял! Уилсон переводит нас в филиал в Южной Америке, правильно?

— Да нет же! Пожалуйста, потерпи еще. Ты не поверишь, как мне это важно.

— Поверить трудно... Ну ладно. Думаем. Говоришь, мало времени... Тогда придется привлечь тех, кто меньше всех боится, кого легче учить, самых доверчивых, самых...

— Маленьких? — Дэн сжал «Цифертон» так, что побелели костяшки пальцев.

— Да, детей. Полагаю, так ведь и поступают миссионеры в далеких странах? Собирают детишек в школы, учат их распевать псалмы... Ну, а потом дети обучают родителей. Не успели оглянуться — вуаля! — техника: телевизионные антенны в джунглях. И все спасены. Точка. Как считаешь, я получу приз? А благодарность в приказе? Ну, хоть что-нибудь?

Дэн поднялся, пересек комнату и положил «Цифертон» на колени товарищу.

— Вот что я тебе скажу. Представь, что это вовсе не игра... Я думаю, это... инструмент. Обучающий инструмент. Придуманный специально для детей. Он предназначен для тренировки мозга таким образом, чтобы ребенок за очень короткое время усвоил приемы глубокой медитации. В считанные недели он добивается таких успехов, каких не принесут долгие годы занятий йогой. Что ты на это ответишь?

Хейес перевел взгляд на разноцветную коробку.

— Ты серьезно?

Дэн кивнул. Потянулся за книгой на столе.

— Слушай: «На высочайшей ступени медитации человек утрачивает чувство самосознания и личности, сливаясь в единое целое с богом...» Джеред пока еще по эту сторону нирваны. Когда его способность к концентрации мысли достигнет требуемой ступени.

Хейес с ужасом воззрился на игру, словно при малейшем движении она должна была ударить его током.

— Что? Что произойдет?..

— Не знаю. Я потеряю его. В каком-то смысле... я потеряю его навсегда. Ларри, я понимаю, мои слова звучат глупо, но мне кажется, эти «игрушки» нам подбросили... откуда-то издалека...

— Думаешь, русские?

— Намного дальше.

Хейес осторожно поднял «Цифертон» и поставил на стол.

— Какое же это расстояние, потвоему?

— Может быть, несколько световых лет.

— Ого-го!..

— Думаешь, я спятил?

— Совершенно точно. Слушай, Дэн...

— Плевать! Я тоже думаю, что свихнулся. Но, черт побери, все это имеет смысл! Они используют эти штуки... как приборчики для настройки. Когда мозг ребенка испускает альфа-волны — или еще какие-нибудь — достаточно долго... достаточно *интенсивно*... это как прямой провод... Один бог знает куда. А может быть, это их средство доставки... Забираются в детские головы, наводят там порядок и готовят ребятишек к... тому, что предстоит...

— Тесные контакты странного рода,— кивнул Хейес, потирая виски.— У тебя съехал чердак, дружище. Ты сам знаешь, что это так. Думаешь, они посылают сюда «миссионеров», чтобы обучать дикарей?

— Что-то вроде этого.

— Дэн, иди домой. Возьми отпуск на недельку. Я объясню Уилсону. Все будет хорошо...

— Я не сошел с ума, Ларри.

— А я и не говорю. Ты просто переутомился.

Дэн вздохнул и потер глаза.

— Да. Я устал. Но я не псих.

— Иди домой.

Войдя в дом, Дэн услышал, как на кухне распевает Кэсс, нарезая сельдерей для салата. Телевизор в гостиной был включен, на экране бушевали спортивные страсти.

— Где Джеред? — спросил Дэн, входя в кухню.

— Ой! Ты меня напугал до смерти. Почему так рано?

— Голова болит. Где малыш?

— По-моему, в гостиной. Что хочешь — свеклу с жареной картошкой или зеленую фасоль?

— Все равно.

— Значит, фасоль. Джеред терпеть не может свеклу.— Кэсс пощупала лоб мужа.— Милый, дать тебе аспирин? Ты плохо выглядишь.

— Я в норме...

Он вернулся в гостиную и выключил телевизор. Откуда-то сверху слабо доносилось тонкое пиканье «Цифертона».

— Взял на время у приятеля с нашей улицы,— сказала Кэсс. Дэн ринулся по лестнице, шагая через две ступени.— Он сказал что-то насчет четвертого уровня. Дэн, не ругай его...

Когда он достиг двери спальни, мелодичные звуки прекратились. Голова шла кругом, в крови бушевал адреналин. Дэн толкнул дверь. Она не открывалась.

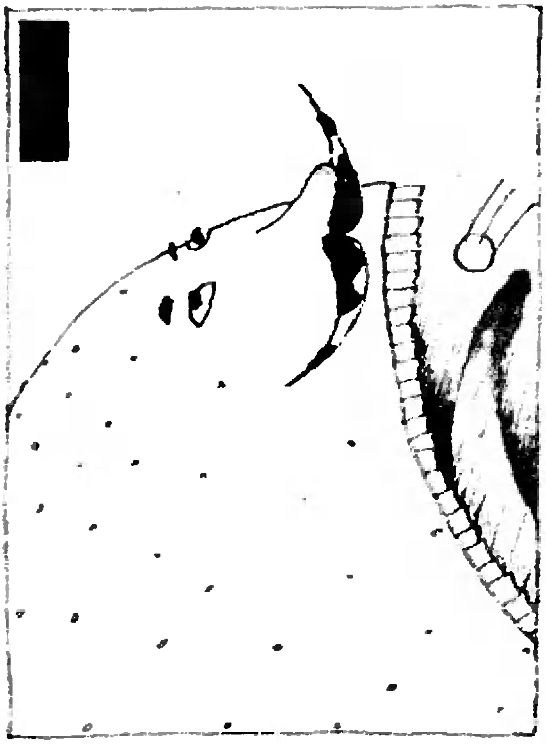
— Джеред! Джеред! — закричал он, бросаясь всем телом на преграду. Внезапно дохнуло клевером и озоном — дверь распахнулась. Спотыкаясь, Дэн бросился через комнату. Чуть выше кровати затухало бледное голубое мерцание. Дэн рванулся к «Цифертону», который только что — мгновение назад — покоился на коленях у сына. Небольшая вмятина на постели еще хранила тепло. Но ребенка не было.

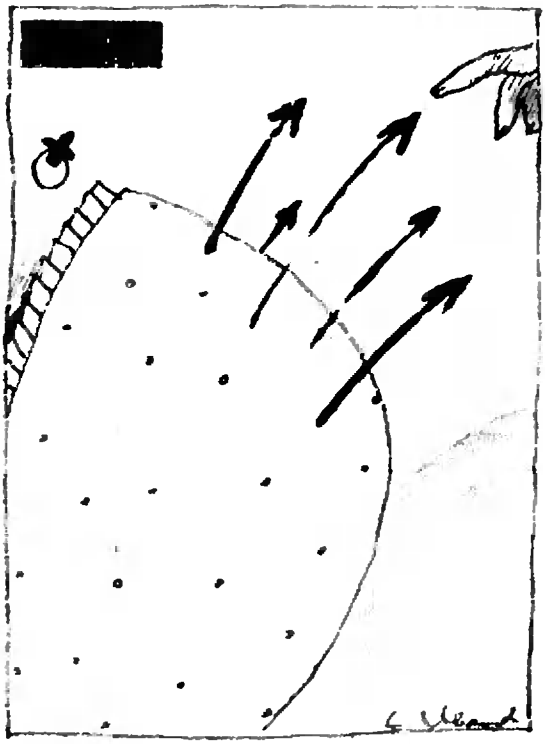
Дэн присел на край кровати и осторожно взял разноцветную, словно карамелька, игру. Он выждал немного, чтобы перестали дрожать пальцы, и прошептал:

— Держись, сынок. Жди меня, Джеред. Я иду. Папа идет к тебе.

Не торопясь, он приступил к игре.

Перевод с английского
В. Бабенко, В. Баканова





Школа в „Кванте"

Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «Как зависит g от глубины?» предназначена девятиклассникам, заметка «Силовые линии и теорема Гаусса» — десятиклассникам. Однако мы советуем всем старшеклассникам прочитать обе заметки, причем лучше всего — сразу одну за другой.

Как зависит g от глубины?

Вопрос: Что это — большое, зеленое, живет на глубине трех метров под землей и ест камни?
Ответ: Большой Зеленый Камнеед.

Из фольклора МФТИ

Как будет изменяться сила тяготения по мере погружения тела в воображаемую шахту, прорытую сквозь Землю по ее диаметру? Какая сила тяготения действовала бы внутри некоторой «полой» планеты? Можно ли было бы ходить по ее внутренней поверхности? Попытаемся ответить на эти и аналогичные им вопросы. И не для того, конечно, чтобы выработать инструкцию для бурильщиков сверхглубоких скважин или для астронавтов, а чтобы лучше разобраться в законе всемирного тяготения.

Закон всемирного тяготения, открытый Ньютоном, утверждает, что любые две материальные частицы (точечные массы) притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной массам этих частиц m_1 и m_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (1)$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг² — гравитационная постоянная. В произвольном случае неточечных масс для определения силы тяготения можно воспользоваться широко известным в физике принципом суперпозиции.

Пусть, например, нам нужно рассчитать силу тяготения, действующую на точечную массу m со стороны тела произвольной формы. Мысленно разобьем тело на точечные массы m_1, m_2, ..., m_n, вычислим силы, действующие на массу m со стороны всех точечных масс, а затем векторно сложим эти силы. Что же получится в итоге? Сразу бросаются в глаза два факта. Во-первых, сила, действующая на точечную массу m, пропорциональна величине этой массы. Во-вторых, сила существенно зависит от того, какое именно тело взаимодействует с нашей точечной массой — какова его форма и размеры, какой массой оно обладает.

Кто и как действует на массу m в нашем примере? Непосредственно массы m_1, ..., m_n через пустое пространство, их разделяющее? Или существует некоторый «посредник»? По современным представлениям таким материальным посредником является поле тяготения, создаваемое массами m_1, ..., m_n во всем окружающем пространстве. Именно это поле и действует на массу m, в нем находящуюся. Если, например, изменить какую-нибудь из масс или как-то сместить их, то изменится и поле.

Для количественной характеристики поля тяготения в данной точке вводится специальная физическая величина — напряженность гравитационного поля. Определим ее так. Запишем выражение для силы тяготения, действующей на точечную массу m, в виде

$$\vec{F}=m\vec{g}, \text{ или } \vec{g}=\frac{\vec{F}}{m}, \qquad (2)$$

где $\vec{g}$ (величина, не зависящая от m!) и есть напряженность гравитационного поля. Она имеет простой физический смысл: с таким ускорением будет двигаться любая точечная масса, если ее поместить в данную точку поля и освободить. В частном случае, когда точечная масса взаимодействует с Землей, $\vec{g}$ — это известное вам ускорение свободного падения.

От чего и как зависит $\vec{g}$? Как и сила тяготения, напряженность поля подчиняется принципу суперпозиции:

$$\vec{g}=\vec{g}_1+\vec{g}_2+...+\vec{g}_n,$$

где $\vec{g}_1$, ..., $\vec{g}_n$ — напряженности полей, создаваемых в данной точке пространства отдельными массами m_1, ..., m_n. Из выражений (1) и (2) следует, что любая точечная масса M создает вокруг себя поле, напряженность которого направлена к этой точке и зависит от расстояния r до нее по закону

$$g=G\frac{M}{r^2}. \qquad (3)$$

А какое гравитационное поле создает вокруг себя сферически симметричное тело? Ответ на этот вопрос был известен Ньютону с самого начала — сила притяжения к Земле вычисляется по той же формуле (1), где r — расстояние до центра Земли. Однако Ньютон понимал, что такое утверждение требует доказательства. Потратив очень много времени и сил, он доказал, что сила притяжения к тонкой сфере тел, расположенных вне нее, равна силе притяжения к материальной точке той же массы, расположенной в центре сферы. А поскольку шар можно разбить на тонкие сферы, такой же результат остается в силе и для шара. Переходя на язык поля, скажем, что величина напряженности поля тяготения, создаваемого тонкой сферой (или ша-

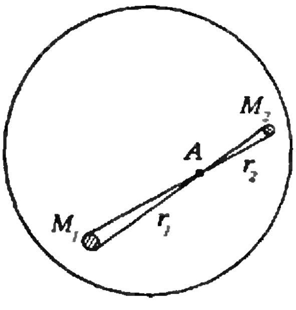


Рис. 1.

ром) радиусом R, на расстоянии $r > R$ от центра задается формулой (3).

Доказательство по принципу суперпозиции является действительно достаточно сложным. Однако его можно обойти. Как это сделать, показано в следующей заметке — «Силовые линии и теорема Гаусса» на примере электрического поля. Попробуйте прочитать эту заметку, всякий раз заменяя слово «заряд» словом «масса», а слова «электрическое поле» словами «поле тяготения». Если вам будет трудно разобраться в деталях, постарайтесь понять хотя бы общий смысл.

Выясним теперь, каково поле тяготения внутри тонкой сферы, т. е. при $r < R$. Оказывается, внутри сферы напряженность поля равна нулю. Для доказательства возьмем произвольную точку, например точку A на рисунке 1, и покажем, что вклады в g_A от двух противоположных участков поверхности сферы, отсекаемых узким конусом, взаимно уничтожаются. Действительно, из подобия следует, что линейные размеры выбранных участков относятся как r_1/r_2, следовательно, отношение их площадей S_1/S_2, равное отношению масс M_1/M_2, есть r_1^2/r_2^2. Тогда из формулы (3) получаем, что создаваемые этими участками в точке A напряженности равны по величине. А поскольку направления их противоположны, они в сумме дают ноль.

Интересный результат, не правда ли? Если бы внутри Земли, скажем, существовала концентрическая пустая полость (как, например, в случае, описанном в научно-фантастическом романе В. А. Обручева «Плутония. Необычайное путешествие в недра земли»), то в этой полости была бы полная невесомость. Оттолкнись чуть-чуть от поверхности и полетишь равномерно и прямолинейно до противоположной стенки. Так что путешествовать по такой Плутонии крайне затруднительно.

Теперь мы можем ответить и на самый первый вопрос — чему равно поле тяготения в шахте, прорытой вдоль

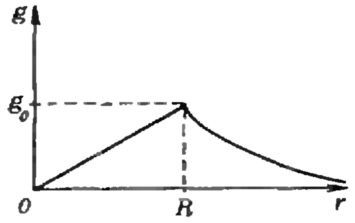


Рис. 2.

диаметра Земли. Для простоты будем считать Землю однородным шаром с радиусом R. Рассмотрим точку на расстоянии $r < R$ от центра Земли. Проведя мысленно сферу радиусом r, разделим Землю на две части — внешнюю и внутреннюю. Как мы уже выяснили, поле, создаваемое в рассматриваемой точке всеми внешними сферическими слоями, равно нулю. Поэтому поле Земли в данной точке совпадает с полем, созданным внутренней частью, т. е. шаром радиусом r. Чтобы использовать формулу (3), надо найти массу M_r этого шара. Очевидно, что отношение массы M_r к массе $M_З$ всей Земли равно отношению их объемов, т. е. отношению кубов радиусов: $M_r/M_З = r^3/R^3$. Следовательно,

$$g_r = G\frac{M_r}{r^2} = G\frac{M_З}{r^2}\frac{r^3}{R^3} = g_0\frac{r}{R}, \qquad (4)$$

где g_0 — ускорение свободного падения на поверхности Земли.

Итак, мы знаем g_r на любых расстояниях от центра Земли, как при $r > R$, так и при $r < R$. Эта зависимость изображена графически на рисунке 2. Попробуем использовать полученные результаты для ответа на вопрос, который любили задавать абитуриентам МФТИ в самом конце собеседования: «Что будет с камнем, брошенным в прорытый сквозь Землю колодец?» Ответить на этот вопрос совсем просто, если вы знакомы со свойствами гармонических колебаний. Действительно, раз сила притяжения пропорциональна r, тело будет совершать колебания относительно центра Земли (сопротивление воздуха, естественно, при этом не учитывается). Интересно, что такие же ко-

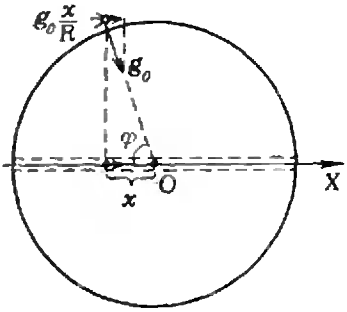


Рис. 3.

лебания (с таким же периодом) будет совершать и тело в колодце, прорытом наклонно. Существовали даже фантастические проекты межконтинентального пассажирского сообщения по прорытым каналам с помощью вагонов на воздушной подушке (подробнее об этом можно прочитать в книге Я. И. Перельмана «Занимательная физика»).

Оказывается, даже не зная ничего о колебаниях, все же можно понять, как будет двигаться камень, брошенный в прорытый колодец. Сравним между собой два движения — камня в колодце и спутника, летящего по околоземной круговой орбите. Точнее, проекции спутника на ось X, проведенную сквозь колодец (рис. 3). Легко убедиться, что проекция ускорения спутника равна $a_x = g_0 \cos\varphi = g_0 x/R$. Но именно с таким ускорением будет двигаться камень на расстоянии x от центра (см. выражение (4)). Значит, и время движения камня сквозь Землю и обратно совпадает с периодом обращения спутника вокруг Земли. Кроме того, легко определить максимальную скорость камня. Очевидно, что она будет равна скорости спутника, т. е. первой космической скорости $v_1 = \sqrt{g_0 R} \approx 8$ км/с.

А теперь представьте себе выражение лица несчастного абитуриента, когда, изложив все эти тонкие физические соображения, он вдруг слышит в ответ: «Как же так, молодой человек? Такая невнимательность! Вы что, забыли? Камень пролетит в колодце всего три метра, после чего его съест Большой Зеленый Камнеед!»

А. Черноуцан

Силовые линии и теорема Гаусса

Из школьного курса физики вы знаете, что наглядное представление об электрическом поле можно получить по картинке силовых линий (договоримся под «электрическим» полем здесь понимать электростатическое поле). Проводя касательную к силовой линии, мы узнаём направление вектора напряженности (стрелки на линиях укажут, куда именно направить этот вектор), сравнивая густоту силовых линий в разных местах (т. е. число силовых линий, проходящих через единичную площадку перпендикулярно к ней), выясняем, где и во сколько раз больше величина напряженности. Однако значение силовых линий этим не исчерпывается.

Хорошо знакомое вам свойство непрерывности линий в пустом пространстве отражает, на самом деле, важнейшее свойство электрического поля. Сформулируем его: электрическое поле устроено так, что *можно* проводить силовые линии, соблюдая правило густоты и не обрывая их при этом в пустом пространстве между зарядами; линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных; на каждом заряде начинается (или заканчивается) число линий, пропорциональное его величине.

Вы удивлены? Вам это свойство кажется очевидным, само собой разумеющимся? Это далеко не так. Будь закон Кулона чуть-чуть иным, и провести силовые линии непрерывно уже не удалось бы. Возьмем, к примеру, точечный заряд. По мере удаления от него густота силовых линий уменьшается. Так, при увеличении расстояния от заряда в 2 раза густота линий уменьшится в 4 раза (число линий не изменится, а площадь поверхности сферы увеличится в 4 раза). Во столько же раз уменьшится и напряженность электрического поля. Но только благодаря тому, что в законе Кулона стоит $1/r^2$! Если бы, например, там было $1/r^3$, то напряженность уменьшилась бы не в 4, а в 8 раз, и для соблюдения правила густоты половину силовых линий пришлось бы оборвать на пути от r до $2r$. И это в пустом пространстве!

Математически строгим выражением свойства непрерывности силовых линий электрического поля является теорема Гаусса. Для того чтобы сформулировать и доказать ее, нам надо сначала перейти от качественного языка силовых линий к точным количественным представлениям. Начнем с того, что несколько перефразируем свойство непрерывности линий.

Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность. Если внутри поверхности зарядов нет, то число вышедших из нее линий в точности равно числу вошедших. Удобно входящие линии учитывать наряду с выходящими, но приписывать им знак «минус». Тогда можно сказать, что полное число выходящих из «пустой» поверхности силовых линий равно нулю. Если же внутри поверхности находится какой-нибудь заряд, то, очевидно, что *полное число линий, выходящих из поверхности, будет пропорционально величине этого заряда.* Это и есть качественная формулировка теоремы Гаусса. Но — пойдем дальше.

Введем скалярную величину Φ — ее называют потоком вектора напряженности через некоторую маленькую площадку:

$$\Phi = ES\cos\alpha. \qquad (1)$$

Здесь $\vec{E}$ — напряженность поля в месте нахождения выбранной площадки (раз площадка маленькая, поле можно считать однородным), S — площадь площадки, α — угол между вектором $\vec{E}$ и вектором $\vec{n}$ нормали к площадке. Посмотрите на рисунок 1: число силовых линий, пронизывающих площадку S, равно произведению их густоты на площадь поперечной площадки $S_\perp = S\cos\alpha$. Так как густота линий пропорциональна E, полное число силовых линий, проходящих через площадку, пропорционально потоку Φ. Всем силовым линиям, выходящим из некоторой замкнутой поверхности, соответствует поток через всю эту поверхность (т. е. сумма потоков через отдельные маленькие участки поверхности). Чтобы выходящие линии давали положительный вклад в поток, а входящие — отрицательный, договоримся, чтобы нормаль к поверхности всюду «смотрела» наружу.

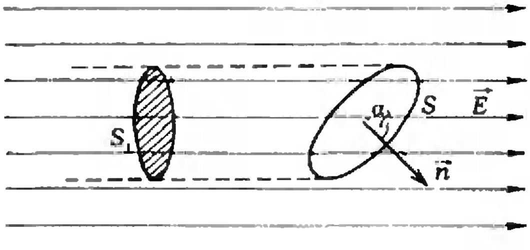


Рис. 1.

Теперь понятно, что теорему Гаусса можно сформулировать так: *поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность пропорционален полному заряду, заключенному внутри этой поверхности.* Чтобы доказать эту теорему, а заодно и вычислить коэффициент пропорциональности, рассмотрим сначала простое, но очень важное свойство величины Φ.

Запишем формулу (1) в виде $\Phi = (E\cos\alpha)S = E_nS$, где E_n — проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали $\vec{n}$. Если поле создается несколькими зарядами, то по принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_k$. Но проекция суммы векторов равна сумме проекций: $E_n = E_{1n} + E_{2n} + \ldots + E_{kn}$. Отсюда получаем, что полный поток вектора напряженности равен сумме потоков, создаваемых отдельными зарядами: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_k$. Поэтому можно говорить о вкладе в полный поток от каждого отдельного заряда.

Докажем вначале, что вклад в поток от точного заряда q, находящегося вне замкнутой поверхности, равен нулю. Рассмотрим два маленьких участка поверхности, отсекаемых узким конусом (рис. 2). Имеем

$$\Phi_1 = E_1 S_1 \cos\alpha_1 = -E_1 S_{1\perp},$$
$$\Phi_2 = E_2 S_2 \cos\alpha_2 = E_2 S_{2\perp},$$

где

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r_1^2},\quad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r_2^2}.$$

Из подобия следует, что

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{S_{1\perp}}{S_{2\perp}}.$$

Таким образом,

$$\Phi_1 = -\Phi_2, \text{ или } \Phi_1 + \Phi_2 = 0.$$

Аналогичное взаимное уничтожение потоков происходит и для любой другой пары соответствующих участков.

Вычислим теперь вклад в поток от точечного заряда, находящегося внутри замкнутой поверхности. Окружим заряд сферической поверхностью радиусом r (рис. 3). Рассуждая аналогично предыдущему, получим, что в этом случае $\Phi_1 = \Phi_2$, т. е. что поток через рассматриваемую произвольную поверхность равен потоку через сферу. А поток через сферу вычислить легко:

$$\Phi = ES = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Таким образом, мы пришли к окончательной формулировке теоремы Гаусса: *поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен полному заряду, заключенному внутри этой поверхности, деленному на электрическую постоянную,* т. е.

$$\Phi = \frac{\sum q_{\text{внут}}}{\varepsilon_0}. \qquad (2)$$

Перейдем теперь к самому приятному — начнем пожинать плоды. Первое применение теоремы Гаусса — это вычисление напряженности электрического поля. Сразу оговоримся, что круг задач, решаемых таким способом, не очень широк (в отличие от способа, основанного на использовании принципа суперпозиции). Но все же он существует. Если мы, например, заранее знаем направление вектора напряженности во всех интересующих нас точках пространства, если удалось выбрать замкнутую поверхность, для которой вычисление потока вектора напряженности является простым, то тогда, может быть, нас ждет успех. Но зато какой успех!

Как известно, много лет потребовалось Ньютону, чтобы доказать, что сила притяжения материальной частицы к шару (Земле) не изменится, если всю массу шара сконцентрировать в его центре. Для проведения доказательства с помощью принципа суперпозиции ему пришлось существенно развить интегральное исчисление. А теперь смотрите, как мы просто справимся с практически такой же задачей. Возьмем шар, равномерно заряженный зарядом Q, и вычислим поле вне его — на расстоянии r от его центра (рис. 4). Из соображений симметрии ясно, что вектор напряженности поля $\vec{E}$ всюду направлен по радиусу. Выразим поток вектора напряженности через сферу

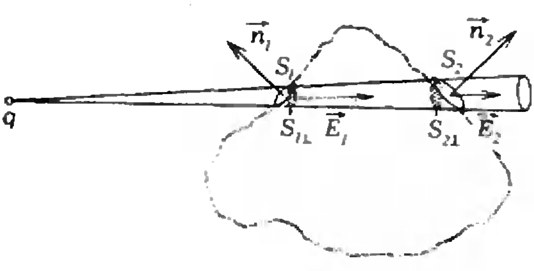


Рис. 2.

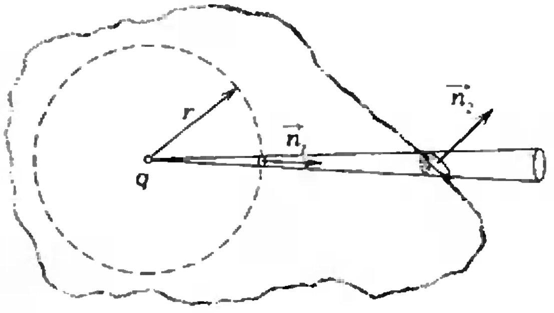


Рис. 3.

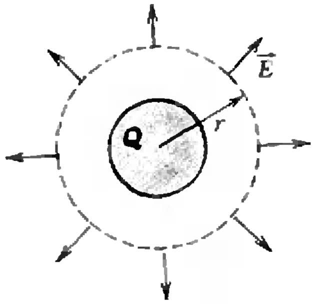


Рис. 4.

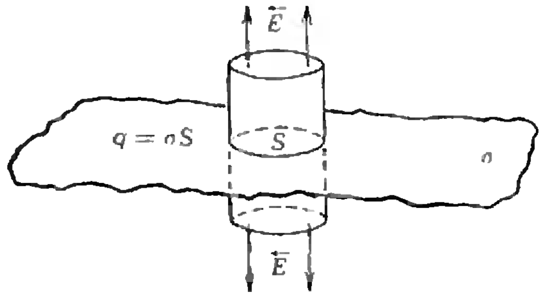


Рис. 5.

радиусом r двумя способами. По определению потока

$$\Phi = ES = 4\pi E r^2,$$

а по теореме Гаусса

$$\Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда получаем

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{Q}{r^2}$$

— поле заряженного шара вне его совпадает с полем точечного заряда, помещенного в центр шара.

Другой пример: найдем напряженность поля бесконечной заряженной плоскости с поверхностной плотностью заряда σ (рис. 5). Из симметрии понятно, что вектор $\vec{E}$ всюду перпендикулярен плоскости. Выберем замкнутую поверхность в виде цилиндра, расположенного симметрично относительно плоскости. Поток вектора напряженности через боковую поверхность цилиндра равен нулю, а через каждое основание площадью S он равен ES, т. е.

$$\Phi = 2ES.$$

Но по теореме Гаусса

$$\Phi = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}.$$

Приравнивая правые части обоих равенств, получаем

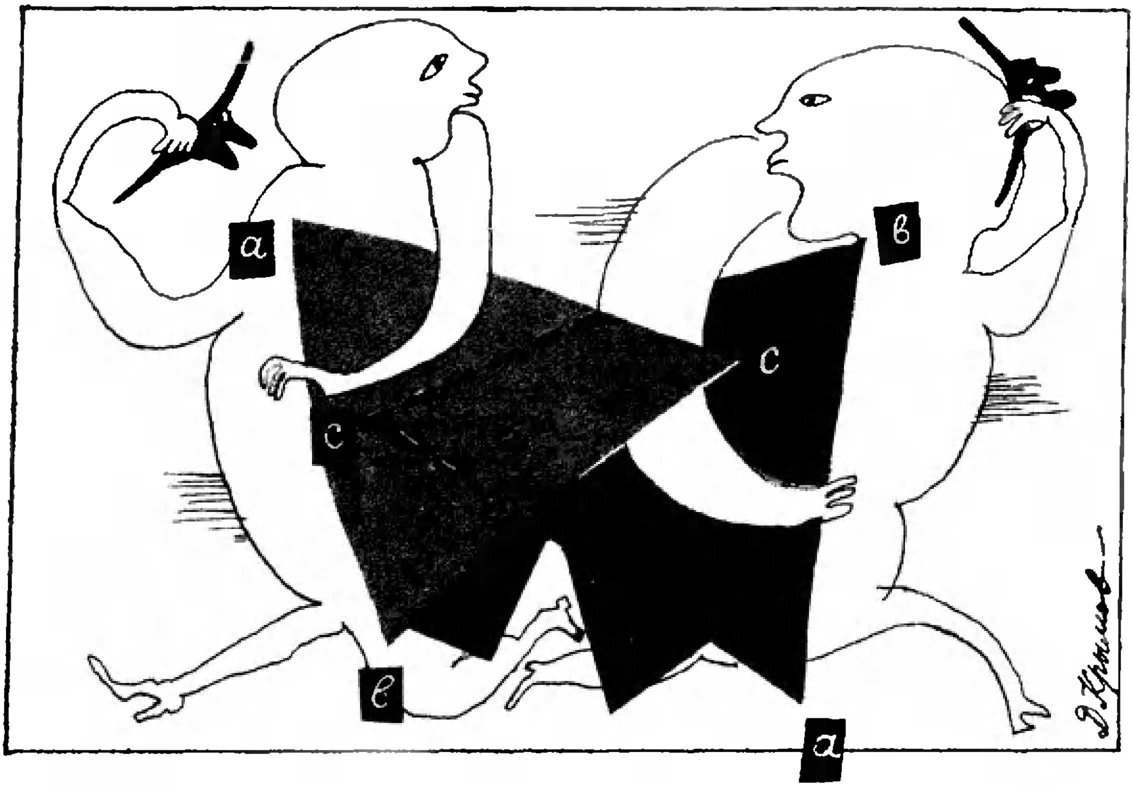
$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Наконец, последний пример. Он касается одного очень важного свойства проводников. Покажем, что статические заряды проводника всегда располагаются на его поверхности. Доказательство очень простое. Раз напряженность поля внутри проводника равна нулю (иначе возникло бы движение свободных зарядов), то поток вектора напряженности через любую замкнутую поверхность, проведенную внутри проводника, равен нулю. А это означает, что равен нулю и заряд внутри любой сколь угодно малой поверхности в толще проводника. Следовательно, все заряды проводника действительно располагаются на его поверхности.

А теперь — важное замечание. Доказательство электронейтральности объема проводника опирается на теорему Гаусса, которая, как и свойство непрерывности силовых линий, верна только в том случае, если в законе Кулона стоит $1/r^2$. Вывод: справедливость закона Кулона можно проверить экспериментально. Для этого достаточно убедиться в электронейтральности толщи проводника.

Вот видите, как много интересного может рассказать лишь одна теорема — теорема Гаусса.

А. Черноуцан



Математический кружок

Теоремы Чевы и Менелая

Б. ЭРДНИЕВ,
Н. МАНЦАЕВ

Из школьного курса вам известны теоремы о замечательных точках в треугольнике: *три биссектрисы (медианы, высоты) пересекаются в одной точке.* Эти свойства являются следствиями теорем, которым посвящена данная статья. Итак, мы поговорим о теоремах Чевы и Менелая, а также о некоторых их обобщениях на трехмерное пространство.

Теорема Менелая

Эта теорема была доказана древнегреческим математиком Менелаем Александрийским в I веке нашей эры.

Теорема 1. *Пусть точки A_1 и C_1 лежат на сторонах BC и AB треугольника ABC (рис. 1), а точка B_1 — на продолжении стороны AC этого треугольника. Для того чтобы точки A_1, B_1, C_1 лежали на одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямой l и $AA_0=h_1$, $BB_0=h_2$, $CC_0=h_3$ — перпендикуляры, опущенные соответственно из точек A, B, C на прямую l (см. рис. 1). Из подобия треугольников AA_0C_1 и BB_0C_1 получаем

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{h_1}{h_2}.$$

Аналогично, рассматривая другие пары подобных треугольников, получаем

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{h_2}{h_3},\ \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{h_3}{h_1}.$$

Перемножая полученные пропорции, приходим к требуемому равенству.

Достаточность. Пусть точки A_1, B_1, C_1 (рис. 2), лежащие на прямых BC, AC, AB, таковы, что

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

Докажем, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

Проведем прямую A_1B_1 и докажем, что точка C_1 ей принадлежит.

Предположим, что это не так. Сначала заметим, что прямая A_1B_1 не параллельна прямой AB (почему?). Пусть T — точка пересечения прямых A_1B_1 и AB (см. рис. 2). Тогда

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BT}{TA}=1. \qquad (1)$$

Из условия и равенства (1) следует, что

$$\frac{BT}{TA}=\frac{BC_1}{C_1A}.$$

Так как точки T и C_1 лежат вне отрезка AB, их совпадение легко следует из следующей леммы.

Лемма. *Пусть A и B — две различные точки. Тогда для любого $k>0$, $k\neq 1$ на прямой AB существуют две и только две точки U и V такие, что $\frac{AU}{UB}=\frac{AV}{VB}=k$, причем одна из этих точек принадлежит отрезку AB, а другая лежит вне отрезка AB.*

Доказательство. Введем на прямой AB координаты, приняв точку A за начало координат (рис. 3). Пусть для определенности $k>1$. Координата искомой точки U, лежащей внутри отрезка AB, удовлетворяет уравнению $\frac{u}{b-u}=k$, откуда

$$u=\frac{k}{k+1}\ b.$$

Точка V вне отрезка AB находится однозначно из уравнения $\frac{v}{v-b}=k$, откуда $v=\frac{kb}{k-1}$.

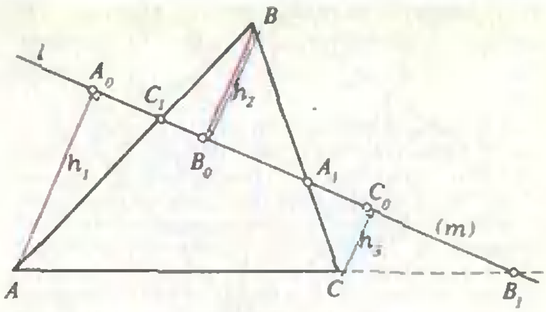


Рис. 1.

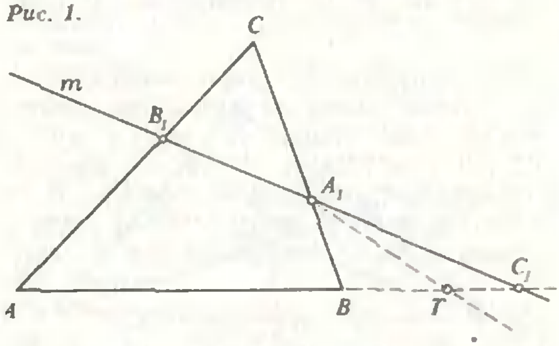


Рис. 2.

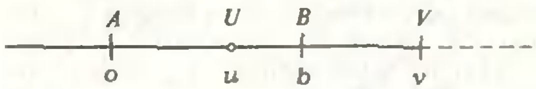


Рис. 3.

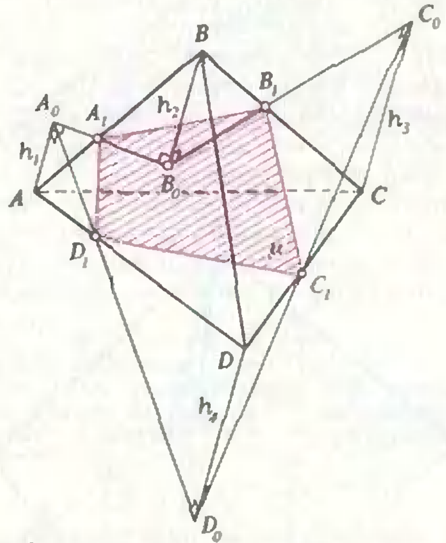


Рис. 4.

Случай $0<k<1$ отличается от рассмотренного лишь тем, что точку V следует искать левее точки A.

Часто теорему Менелая формулируют иначе, используя понятие об отношении направленных

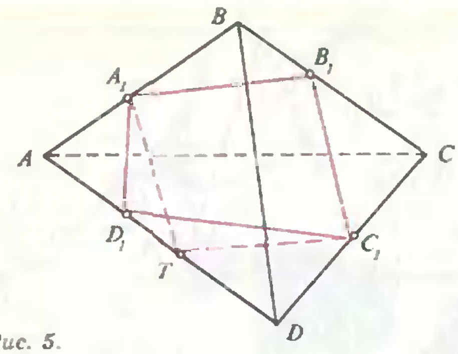


Рис. 5.

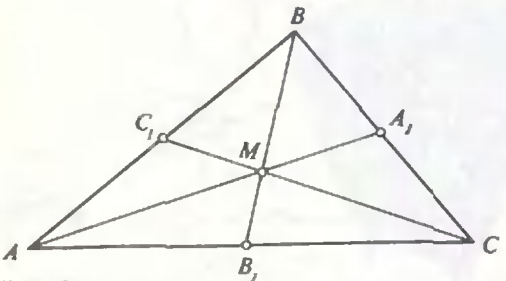


Рис. 6.

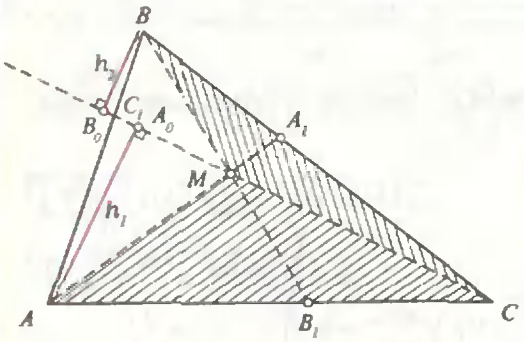


Рис. 7.

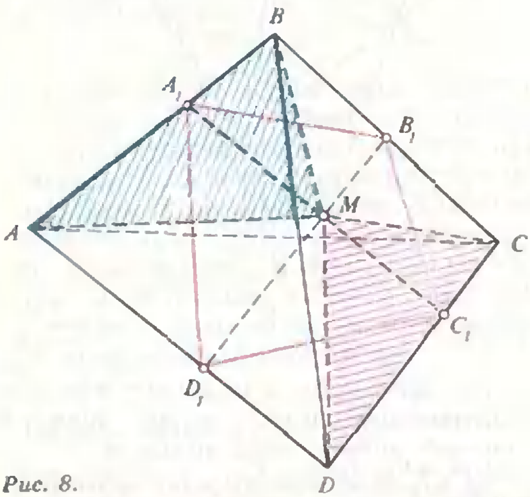


Рис. 8.

отрезков. Будем считать, что $\frac{AU}{UB}=k$, если $\vec{AU}=k\vec{UB}$. Ясно, что если векторы $\vec{AU}$ и $\vec{UB}$ одинаково направлены, то $k>0$. Если же эти векторы противоположно направлены, то $k<0$, при этом, разумеется, число $|k|$ равно отношению длин отрезков AU и UB.

При таком понимании отношения отрезков теорема Менелая формулируется так. *Пусть три точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямых BC, AC и AB соответственно. Для того чтобы эти точки принадлежали одной прямой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1.$$

Мы рекомендуем читателям доказать эту теорему в качестве упражнения.

Теорема Менелая допускает интересное стереометрическое обобщение.

Теорема 2. *Если плоскость μ пересекает ребра AB, BC, CD и DA тетраэдра $ABCD$ в точках A_1, B_1, C_1, D_1, то*

$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1. \qquad (2)$$

Обратно, если для четырех точек A_1, B_1, C_1, D_1, лежащих соответственно на ребрах AB, BC, CD, DA тетраэдра, выполнено равенство (2), то эти четыре точки лежат в одной плоскости.

Доказательство. Пусть h_1, h_2, h_3, h_4 — расстояние от точек A, B, C, D соответственно до плоскости μ (рис. 4). Тогда

$$\frac{AA_1}{A_1B}=\frac{h_1}{h_2},\quad \frac{BB_1}{B_1C}=\frac{h_2}{h_2},\quad \frac{CC_1}{C_1D}=\frac{h_3}{h_4},$$

$$\frac{DD_1}{D_1A}=\frac{h_4}{h_1}.$$

Осталось перемножить полученные отношения.

Для доказательства обратной теоремы проведем плоскость $A_1B_1C_1$. Пусть эта плоскость пересекает ребро DA в точке T (рис. 5). По доказанному

$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DT}{TA}=1,$$

а по условию

$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1.$$

Поэтому

$$\frac{DT}{TA}=\frac{DD_1}{D_1A},$$

и, по лемме, точки T и D_1 совпадают. Утверждение доказано.

Упражнения

1. Докажите, что, если все стороны пространственного четырехугольника касаются некоторой сферы, то четыре точки касания лежат в одной плоскости.

2. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке.

Теорема Чевы

Эту замечательную теорему доказал в XVII веке итальянский инженер и математик Чева.

Теорема 3. *Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и BA треугольника ABC (рис. 6). Для того чтобы отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1. \qquad (3)$$

(Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 иногда называют чевианами.)

Доказательство. Необходимость. Пусть отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке M внутри треугольника ABC (рис. 7). Обозначим через S_1, S_2, S_3 площади треугольников AMC, CMB и AMB, а через h_1, h_2 — расстояния соответственно от точек A и B до прямой MC.
Тогда

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{S_1}{S_2},$$

аналогично

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_3}{S_1},\quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_2}{S_3}.$$

Перемножив полученные пропорции, убеждаемся в справедливости теоремы.

Достаточность. Пусть точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах BC, CA и AB треугольника и выполнено соотношение (3), M — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1, а отрезок CM пересекает сторону AB в точке Q. Тогда, по уже доказанному,

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1,$$

так что

$$\frac{AQ}{QB}=\frac{AC_1}{C_1B}.$$

Из леммы снова следует совпадение точек: $Q=C_1$. Достаточность доказана.

Упражнение

3. Докажите, что следующие отрезки в треугольнике пересекаются в одной точке: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты; г) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон со вписанной окружностью (точка Жергонна); д) отрезки, проходящие через вершины и делящие периметр пополам; е) отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания противоположных сторон с вневписанными окружностями.

Перейдем теперь к пространственному обобщению теоремы Чевы.

Теорема 4. *Пусть M — точка внутри тетраэдра $ABCD$, A_1, B_1, C_1 и D_1 — точки пересечения плоскостей CMD, AMD, AMB и CMB с ребрами (рис. 8) AB, BC, CD и DA соответственно. Тогда*

$$\frac{AA_1}{A_1B}\cdot\frac{BB_1}{B_1C}\cdot\frac{CC_1}{C_1D}\cdot\frac{DD_1}{D_1A}=1. \qquad (4)$$

Обратно, если для точек A_1, B_1, C_1, D_1, лежащих на соответствующих ребрах, выполнено соотношение (4), то плоскости ABC_1, BCD_1, CDA_1 и DAB_1 проходят через одну точку.

Доказательство необходимости легко получить, если заметить, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 (см. рис. 8) лежат в одной плоскости (это плоскость, проходящая через прямые A_1C_1 и B_1D_1, пересекающиеся в точке M), и применить теорему Менелая.

Обратная теорема доказывается так же, как и обратная теорема Менелая в пространстве: нужно провести плоскость через точки A_1, B_1, C_1 и доказать с помощью леммы, что эта плоскость пересечет ребро DA в точке D_1.

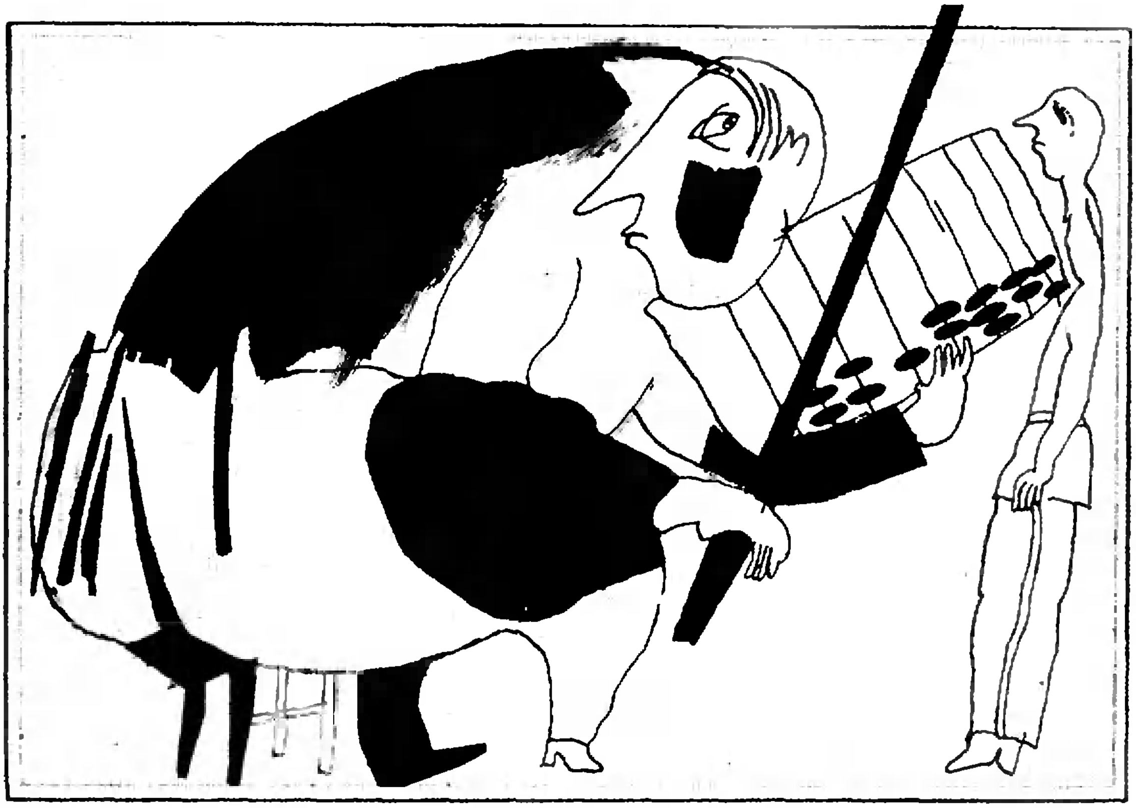
Упражнения

4. Пусть в треугольнике ABC проведены три чевианы AA_1, BB_1 и CC_1, пересекающиеся в точке O. Тогда

$$\frac{OA_1}{A_1A}+\frac{OB_1}{B_1B}+\frac{OC_1}{C_1C}=1.$$

5. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке (медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий его вершину с центром противоположной грани).

6. В тетраэдре $ABCD$ суммы противоположных ребер равны. Докажите, что существует сфера, касающаяся всех ребер этого тетраэдра.



Практикум абитуриента

Арифметические текстовые задачи на конкурсном экзамене

И. ШАРЫГИН

— Это задача, собственно говоря, алгебраическая,— говорит он.— Ее с иксом и игреком решить можно.

. . . . .

— И без алгебры решить можно,— говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая.

. . . . .

— Вот-с... по-нашему, по-неученому.

А. П. Чехов. Репетитор

Давным-давно, в доброе старое время, любили в школе текстовые арифметические задачи. Методам их решения, зачастую весьма изощренным, учили долго и тщательно, и умения эти сохранялись на всю жизнь. При этом школа не только учила методам, но и воспитывала вкус — арифметическое решение считалось более красивым, чем алгебраическое. Впрочем, и сегодня для любого мало-мальски математически воспитанного человека арифметические решения алгебраических задач, равно как и геометрические решения задач по геометрии, выглядят куда как привлекательнее алгебраических решений.

Здесь самое время вспомнить задачу, поставившую в тупик репетитора Егора Зиберова.

Задача 1. *«Купец купил 138 арш. черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб?»*

По всей видимости, Удодов-старший решал ее следующим образом.

138 арш. черного сукна стоят $138 \cdot 3 = 414$ руб. Разница $540 - 414 = 126$ руб. получается за счет синего, каждый метр которого на 2 руб. дороже. Следовательно, синего сукна было $126 : 2 = 63$ арш., а черного — $138 - 63 = 75$ арш.

Интересно, что будет, если подобную задачу дать на конкурсном экзамене? Нет, мы не сомневаемся в том, что... впрочем, лучше сказать — мы надеемся на то, что подавляющее большинство абитуриентов успешно справится с этой задачей. Но вряд ли найдется хотя бы одно решение, подобное приведенному. У некоторых даже возникнет вопрос: а разве так можно? Вся выучка выпускника восстает против таких решений. Лучше, во всяком случае, спокойнее решать эту задачу как обычно с «иксом» и «игреком».

Тем не менее изредка на конкурсных экзаменах встречаются текстовые задачи, предполагающие именно арифметические решения. Кроме того, бывают ситуации, когда здравые арифметические соображения могут существенно упростить процесс решения. О такого рода задачах мы и расскажем в этой статье.

Задача 2. *На реке расположены пункты A и B, причем B ниже по течению на расстоянии 20 км от A. Катер направляется из A в B, затем сразу возвращается в A и снова следует в B. Одновременно с катером из A отправился плот. При возвращении из B катер встретил плот в 4 км от A. На каком расстоянии от A катер нагонит плот, следуя вторично в B?*

Решение. Заметим, что катер удаляется от плота или приближается к нему с одной и той же скоростью — своей скоростью относительно воды. Следовательно, время, которое катер плыл от A до B, удаляясь от плота, равно времени, которое катер плыл от B до встречи с плотом. Значит, отношение путей, пройденных катером от A до B и от B до плота, равно отношению его скоростей по и против течения, т. е. отношение скоростей равно $20/16 = 5/4$. Таким же и по тем же соображениям будет отношение путей, пройденных катером от A до второй встречи с плотом и от первой встречи до A. Таким образом, катер нагонит плот в 5 км от A.

Задача 3. *На реке расположены пункты A и B. Одновременно из этих пунктов навстречу друг другу отходят два одинаковых катера, которые встречаются в некотором пункте, обмениваются почтой и возвращаются обратно. Катер, вышедший из A, возвращается обратно через 1 ч после выхода. Если бы катер, отправляющийся из A, вышел на 15 мин раньше катера, отправляющегося из B, то встреча произошла бы на равном расстоянии от обоих пунктов. Через сколько времени возвращается обратно катер, выходящий из пункта B?*

Решение. Заметим, что момент возвращения катера в A полностью определяется лишь моментом выхода катера из B, равно как и возвращение катера в B определяется моментом выхода катера из A. Чтобы понять это, достаточно представить себе, что в точке встречи они не обмениваются почтой, а продолжают движение в противоположный пункт. Следовательно, во второй раз катер, вышедший из A, вернулся бы обратно через 1 ч 15 мин после выхода, т. е. на полпути из A в B и обратно ему нужно 1 ч 15 мин, а на весь путь 2 ч 30 мин. Таким образом, катер, выходящий из B, возвращается обратно через 1 ч 30 мин.

Во многих сборниках конкурсных задач можно встретить следующую задачу.

Задача 4. *Имеются два слитка с массами m кг и n кг с различным процентным содержанием меди. От каждого слитка отделяется кусок, причем эти куски имеют равную массу, и сплавляются с оставшейся частью другого слитка. Какой массы куски следует отрезать от каждого слитка, чтобы процентное содержание меди в новых слитках было бы равным?*

Решение. Безусловно, эта задача легко решается стандартным образом при помощи уравнений. Правда, при этом надо не испугаться того, что число неизвестных (три) будет больше числа уравнений (одно). Как ни странно, более общим методом решения в данном случае будет арифметический. Более общим в том смысле, что он безболезненно проходит для любого числа слитков, в то время как алгебраический метод приводит к громоздким, трудно обозримым вычислениям.

На самом деле данная задача — обычная арифметическая задача «на части». В каждый из вновь образовавшихся слитков части исходных должны войти в отношении $m:n$. (Подумайте, почему?) Значит, в новом слитке массой в m кг содержится m равных частей из первого слитка (массой m кг) и n таких же частей из второго слитка. Масса одной части равна $\frac{m}{m+n}$ кг. Остаток от первого слитка в этом новом слитке равен $\frac{m}{m+n}m=$ $=\frac{m^2}{m+n}$ кг, а отрезанная часть второго — $\frac{mn}{m+n}$ кг. Такую же часть надо отрезать от первого слитка.

Рассмотрим теперь несколько задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в вузы.

З а д а ч а 5. *Пятеро благородных рыбаков занимались ловлей рыбы. По окончании лова первому показалось, что он поймал больше остальных, и он разделил между ними поровну 1/3 своей добычи. После этого стало ясно, что у второго оказалось больше рыбы, чем у остальных, и он разделил между всеми остальными поровну 1/3 всей оказавшейся у него рыбы. Известно, что общий улов составляет 6 кг 400 г и что в результате описанных процедур он разделился поровну. Определите первоначальный улов каждого из рыбаков.*

Р е ш е н и е. Данная задача — типичный пример арифметической задачи, решаемой с конца. В конце у каждого рыбака оказалось по 1 кг 280 г рыбы. Значит, у второго рыбака, перед тем, как он делился с остальными, было в 3/2 раза больше рыбы, а именно — 1 кг 920 г. Значит, у каждого из четырех оставшихся рыбаков в это время было по 1 кг 280 г— —640 г:4=1 кг 120 г. Рассуждая таким же образом, найдем, что улов первого рыбака равнялся 1 кг 680 г, второго — 1 кг 780 г, а у каждого из трех оставшихся — по 980 г.

З а д а ч а 6. *В порту для загрузки танкеров имеются три трубопровода. По первому из них закачивается в час 300 тонн нефти, по второму — 400 тонн, по третьему — 500 тонн. Нужно загрузить два танкера. Если загрузку производить первыми двумя трубопроводами, подключив к одному из танкеров первый трубопровод, а к другому танкеру второй трубопровод, то загрузка обоих танкеров при наиболее быстром из двух возможных способов подключения займет 12 часов. При этом какой-то из танкеров, может быть, окажется заполненным раньше, и тогда подключенный к нему трубопровод отключается и в дальнейшей загрузке не используется. Если бы вместимость меньшего по объему танкера была вдвое больше, чем на самом деле, и загрузка производилась бы вторым и третьим трубопроводами, то при быстрейшем способе подключения загрузка заняла бы 14 часов. Определить, сколько тонн нефти вмещает каждый из танкеров.*

Р е ш е н и е. Очевидно, что более производительный трубопровод следует подключить к танкеру с большей вместимостью. Поскольку один из двух танкеров был заполнен ровно за 12 часов, то либо меньший вмещает $12\cdot300=3600$ тонн нефти, либо больший $12\cdot400=4800$ тонн. Первый случай невозможен, так как при удвоении вместимости меньшего танкера получаем 7200 тонн, а для заполнения такого танкера даже третьим трубопроводом требуется более 14 часов. Следовательно, больший танкер вмещает 4800 тонн и заполняется вторым и, тем более, третьим трубопроводом быстрее, чем за 14 часов. Значит, меньший танкер вмещает $\frac{1}{2}\cdot14\cdot500=3500$ тонн.

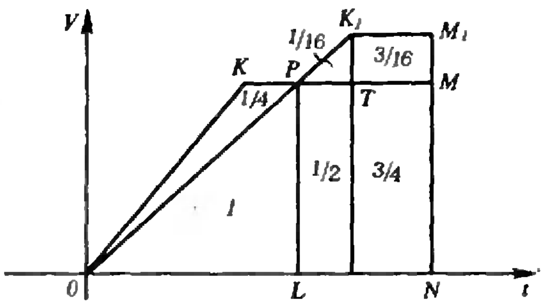
Самое главное в этой задаче — не испугаться громоздкого условия, подойти к ней с позиции обычного здравого смысла. Минимальный здравый смысл и понимание, что такое «процент» — вот все необходимое для решения следующей задачи.

Задача 7. *В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа членов группы, принявших участие в кроссе, заключен в пределах от 96,8 % до 97,2 %. Определите минимально возможное число членов такой группы.*

Решение. Процент не участвовавших в кроссе заключен в пределах от 2,8 % до 3,2 %. Если бы в кроссе не участвовал 1 человек (меньше уже нельзя), то число членов группы заключалось бы в пределах от $1\cdot\frac{100}{2,8}=35,7...$ до $1\cdot\frac{100}{3,2}=31,2...$, т. е. минимальное число членов группы будет 32 человека. Понятно, что при меньшем числе членов группы 3,2 % от этого числа будет меньше 1, а по условию в кроссе не участвовал по крайней мере один человек.

Следующая задача не совсем соответствует теме статьи, поскольку при ее решении больше используются геометрические, чем арифметические методы. Мы включили ее по двум причинам. Во-первых, при ее решении не используются ни уравнения, ни другие соотношения, содержащие неизвестные. Во-вторых, иллюстрируется один весьма полезный метод решения задач на движение — графическая интерпретация.

Задача 8. *Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю, ускорения различны), а затем, достигнув некоторой скорости,— равномерно. Отношения скоростей равномерного движения поездов равно 5/4. В некоторый момент времени скорости поездов оказались равными, а один из них прошел к этому времени расстояние в 5/4 раза больше, чем другой. В пункты B и A поезда прибыли одновременно. Какую часть пути прошел каждый из поездов к тому моменту, когда их скорости оказались равными?*



Решение. Рассмотрим графики, изображающие зависимость скорости от времени для каждого поезда. При этом можно считать, что оба поезда вышли из одного пункта. Для одного поезда графиком является ломаная OKM, для другого — OK_1M_1 (см. рисунок). Длина пройденного пути к определенному моменту времени одним из поездов равна площади фигуры, ограниченной снизу отрезком оси t и соответствующей частью графика его скорости сверху. По условию площади трапеций $OKMN$ и OK_1M_1N равны, значит, равновелики и фигуры OKP и PK_1M_1M. Площадь $OKPL$ равна 5/4 площади OPL (по условию). Если площадь OPL равна 1, то площадь OKP есть 1/4; площадь PK_1T равна 1/16, поскольку $K_1T=\frac{1}{4}PL$ (по условию отношение скоростей равномерного движения равно 5/4, т. е. $M_1N=\frac{5}{4}PL$), а треугольники OPL и PK_1T подобны. Далее из равновеликости OKP и PK_1M_1M находим площадь прямоугольника TK_1M_1M. Она равна $\frac{3}{16}$. Затем находим площади двух оставшихся прямоугольников. Весь путь (равен площади $OKMN$ или OK_1M_1N) равен $2\frac{1}{2}$. Поскольку площади трапеции $OKPL$ и треугольника OPL соответственно равны $\frac{5}{4}$ и 1, то в момент равенства скоростей (точка P) один поезд прошел $\frac{1}{2}$ пути, а другой — $\frac{2}{5}$.

И в заключение рассмотрим задачу, которая, по существу, является арифметической, поскольку решение основано на свойствах делимости натуральных чисел, хотя для удобства мы все же введем неизвестные. По содержанию эта задача скорее олимпиадная, чем конкурсная.

Задача 9. *У восьми школьников в сумме имеется 7 руб. 19 коп. Известно, что у любых двух из них различные суммы денег, но у одного из них в целое число раз больше денег, чем у другого. Сколько денег у каждого школьника?*

Решение. Пусть x_1 — наименьшая сумма, x_1x_2 — вторая по величине, ..., $x_1x_2...x_8$ — наибольшая сумма. По условию $x_i \neq 1$ при $i > 1$, $x_1 + x_1x_2 + ... + x_1x_2...x_8 = 719$. 719 — число простое, следовательно, $x_1 = 1$. Далее имеем $x_2 + x_2x_3 + ... + x_2x_3...x_8 = 718 = 2 \cdot 359$. Таким образом, $x_2 = 2$. Затем получим $x_3 = x_4 = 2$ и $x_5 + x_5x_6 + x_5x_6x_7 + x_5x_6x_7x_8 = 88 \cdot x_5$ — делитель 88. Если $x_5 = 2$, то $x_6 + x_6x_7 + x_6x_7x_8 = 43$. 43 — число простое, а $x_6 \neq 1$, значит, $x_5 \neq 2$. При $x_5 = 4$ найдем $x_6 = 3$, $x_7 = x_8 = 2$. Другие значения x_5 не подойдут.

Итак, школьники имели соответственно 1, 2, 4, 8, 32, 96 коп., 1 руб. 92 коп., 3 руб. 84 коп.

Задачи для самостоятельного решения

1. На овощной базе имелся крыжовник, влажность которого составляла 99 %. За время хранения его влажность уменьшилась на 1 % (стала 98 %). На сколько процентов уменьшилась масса хранившегося на базе крыжовника?

2. Автомобиль проезжает путь от A до B за 1 час. Автомобиль выехал из A и одновременно из B вышел пешеход. Автомобиль встретил пешехода, довез его до A и затем прибыл в B, затратив на весь путь 2 ч 40 мин. За какое время может пройти весь путь от B до A пешеход?

3. Теплоход проходит путь от A до B по течению за 3 часа, а возвращается обратно за 4 часа. За какое время преодолеют путь от A до B плывущие со скоростью течения плоты?

4. Поезд, следующий из пункта A в пункт B, делает по пути несколько остановок. На первой остановке в поезд садится 5 пассажиров, а на каждой следующей — на 10 пассажиров больше. На каждой остановке 50 пассажиров выходит из поезда. Возможен ли случай, когда в пункт B прибывает менее 336 пассажиров, если из пункта A их выезжает 462?

5. В сообщении о лыжном кроссе сказано, что процент числа участников кросса, не уложившихся в норматив, заключен от 94,2 % до 94,4 %. Каково наименьшее число участников кросса?

6. Автобус на пути из A в B делает 5 остановок по 10 мин через каждые 16 км (расстояние от A до B равно 96 км), скорость автобуса равна 65 км/ч. Одновременно с автобусом из B навстречу ему выезжает велосипедист со скоростью 21 км/ч. На каком расстоянии от A автобус встретится с велосипедистом?

7. Пассажирский поезд проходит мимо столба за 6 секунд. За какое время пройдут друг мимо друга скорый и пассажирский поезда, если скорость скорого поезда в 3/2 раза больше скорости пассажирского, а длина пассажирского в 4/3 раза больше длины скорого?

8. Работа началась между 9 и 10 часами утра, а закончилась между 15 и 16 часами того же дня. Определите продолжительность работы, если в момент начала и в момент окончания работы минутная и часовая стрелки были перпендикулярны.

9. Один рабочий может изготовить партию деталей за 12 часов. Работу начал один рабочий, через 1 час к нему присоединился второй, еще через час — третий и т. д., пока работа не была выполнена. Сколько времени проработал первый рабочий? (Производительность труда всех рабочих одинакова.)

10. Имеются три слитка массой 2, 3 и 5 кг с различным содержанием меди. Каждый слиток разделен на три части, и из девяти получившихся кусков получены три слитка массой 2, 3 и 5 кг с равным содержанием меди. На какие части следует разделить исходные слитки, чтобы гарантировать равное процентное содержание меди в получившихся слитках независимо от содержания ее в исходных слитках?

11. Три школьника делят между собой орехи. Сначала первый школьник дал каждому из двух других по одной четверти имевшихся у него орехов и еще пол-ореха. Затем второй дал каждому из двух других по одной четверти оказавшихся у него орехов и еще пол-ореха. Затем тоже сделал третий школьник. В результате у каждого оказалось по 30 орехов. Сколько орехов было у каждого школьника первоначально?

12. Имеются два сосуда. В одном содержится 3 л 100 % кислоты, а в другом 2 л воды. Из первого сосуда во второй перелили один стакан кислоты, а затем из второго в первый — один стакан смеси. Эту операцию повторили еще три раза. В результате во втором сосуде оказалась кислота крепостью 42 %. Сколько процентов кислоты содержится теперь в первом сосуде?

13. Пункт B находится выше по течению, чем пункт A, на расстоянии 4,5 км от A. Скорость течения реки 3 км/ч. Двигаясь в стоячей воде, гребец идет со скоростью 5 км/ч. Гребец вышел из A, доплыл до B и вернулся в A. Через равные промежутки времени гребец отдыхал в течение 10 мин (в это время лодка плывет по течению), а всего таких перерывов оказалось 8. Через сколько времени гребец вернулся обратно в A?

Варианты вступительных экзаменов

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический и экономический факультеты)

1. Из пункта A в пункт B выехал скорый поезд. Одновременно навстречу ему из B в A выехал товарный поезд. Через 5 часов 20 минут они встретились. В пункт B скорый поезд прибыл на 8 часов раньше, чем товарный в A. Сколько времени находился в пути каждый поезд?

2. Решите уравнение

$$2\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=3\operatorname{tg}2x+5.$$

3. Длины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ соответственно равны 9 и 3. Точка E — середина боковой стороны AB, точка F — середина CD. Биссектриса угла BAD пересекает среднюю линию EF в точке P, а биссектриса угла ADC — в точке Q. Длины отрезков EQ, PQ и PF равны. Найдите площадь трапеции.

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$|a-2x|+1=|x+3|$$

имеет единственное решение.

5. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC', DD'. Длина ребра куба равна единице. Через прямую $B'C$ проведена плоскость, пересекающая ребро AB и составляющая угол 60° с прямой $A'B$. В каком отношении эта плоскость делит ребро AB?

Вариант 2

(физический факультет)

1. Найдите все пятизначные числа вида $67m1n$ (m и n — цифры), которые делятся на 36.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2}\sin x=\sqrt{5\cos x-1}.$$

3. Один из углов треугольника равен 60°, радиус описанной около него окружности равен $7/\sqrt{3}$, а радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найдите площадь треугольника.

4. Решите неравенство

$$\log_{|\sin x|}(x^2-14x+73)>\frac{2}{\log_5|\sin x|}.$$

5. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA', BB', CC' и DD'. Длины всех ребер куба равны единице. Точки M и N — середины CD и CC' соответственно. Найдите расстояние между прямыми AN и BM.

Вариант 3

(факультеты естественных наук и геолого-геофизический)

1. Имеются два сплава, в одном из которых содержится 20 %, а в другом — 30 % олова. Сколько нужно взять первого и второго сплавов, чтобы составить из них 10 кг нового сплава, содержащего 27 % олова?

2. Решите уравнение

$$4\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}x=\frac{5}{\cos x}.$$

3. В остроугольном треугольнике ABC длины медиан BM, CN и высоты AH равны соответственно 4, 5 и 6. Найдите площадь треугольника.

4. Решите неравенство

$$\sqrt{21x+16}-\sqrt{x-4}<20.$$

5. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=4$, $BC=2$. Длины всех боковых ребер равны 3, точка M — середина AS. Через прямую BM параллельно диагонали AC проведена плоскость. Определите величину угла между этой плоскостью и плоскостью SAC.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

После текста каждой задачи в скобках указан средний процент решивших ее.

Вариант 1

1. В цилиндре без трения движутся три поршня с массами m, M и m. Между поршнями находится газ, масса которого пренебрежимо

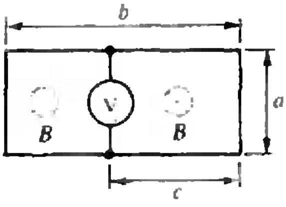


Рис. 1.

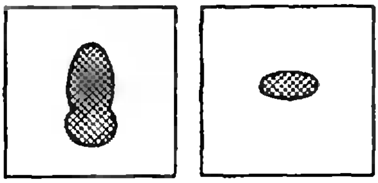


Рис. 2.

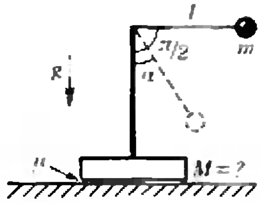


Рис. 3.

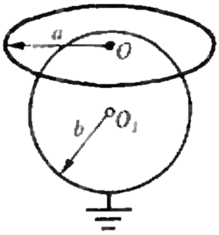


Рис. 4.

Рис. 5.

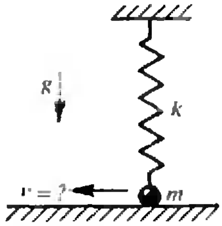


Рис. 6.

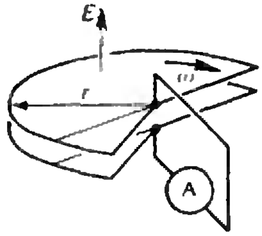


Рис. 7.

мала по сравнению с массами поршней. Внешнее давление равно нулю. Найдите ускорение среднего поршня массой M в тот момент, когда крайние поршни имеют ускорения a_1 и a_2 соответственно. (74 %)

2. Два одинаковых проводящих диска радиусом R каждый, один из которых несет заряд $+q_1$, а другой — заряд $-q_2$, сначала соединяют так, что их оси совпадают, а потом слегка раздвигают вдоль осей. С какой силой взаимодействуют диски после разведения? (63 %)

3. Из однородной проволоки, обладающей заметным сопротивлением, сделан прямоугольник размером $a \times b$ (рис. 1). Перпендикулярно плоскости прямоугольника создается магнитное поле, индукция которого B линейно растет со временем по закону $B = \alpha t$. На расстоянии c от одной из сторон длиной a подключен вольтметр, сопротиаление которого очень велико. Какое напряжение покажет этот вольтметр? (33 %)

4. Оцените плотность пламени свечи. (56 %)

5. Если шарик положить на горизонтальное плоское зеркало и осветить сбоку, то на экране видны две тени от шарика, а если положить тонкую шайбу вместо шарика, то видна только одна тень (рис. 2). Объясните явление. (82 %)

Вариант 2

1. В сосуд сечением S, частично заполненный жидкостью с плотностью ρ, положили кубик с ребром a и плотностью $\rho_1 < \rho$. На сколько поднимется уровень жидкости в сосуде? (74 %)

2. На бруске, находящемся на горизонтальной плоскости, установлен подвес с нитью длиной l и грузой массой m (рис. 3). Груз отклонили на угол $\pi/2$ и отпустили. Определите массу бруска, если он сдвинулся, когда угол между нитью и вертикалью был равным α. Коэффициент трения бруска о плоскость μ. (34 %)

3. В центре уединенного проволочного заряженного кольца радиусом a потенциал равен φ_0. Это кольцо поднесли к заземленному шару радиусом b так, что только центр O кольца оказался на поверхности шара (рис. 4). Найдите индуцированный на шаре заряд. (22 %)

4. Оцените скорость молекул водорода, входящего в состав воздуха в комнате. (62 %)

5. Около одного из торцов пластмассового прозрачного стержня с гладкими поверхностями расположен источник света, около другого — экран. На экране в отсутствие стержня наблюдается монотонная освещенность, а стержень вызывает появление яркого светлого пятна. Объясните явление. (77 %)

Вариант 3

1. Газ, имеющий в начальном состоянии 1 температуру T (рис. 5), охлаждают при постоянном объеме (участок $1-2$), пока давление не уменьшится в n раз. После чего газ нагревают при постоянном давлении до первоначальной температуры T (на участке $2-3$). Найдите совершенную газом работу, если его масса m, а молярная масса М. (68 %)

2. Верхняя точка недеформированной пружины жесткостью k и длиной l прикреплена к потолку, а к нижнему концу пружины прикреплено тело массой m, лежащее на гладкой горизонтальной плоскости прямо под точкой подвеса (рис. 6). Какую наименьшую скорость нужно сообщить этому телу вдоль плоскости, чтобы оно оторвалось от плоскости? (61 %)

3. У переменного конденсатора обкладки состоят из двух пар соприкасающихся полудисков одинакового радиуса r (рис. 7). Подвижные полудиски верхней и нижней обкладок вращаются с угловой скоростью ω, то полностью перекрывая неподвижные, то образуя с ними полные диски. Конденсатор помещен во внешнее электрическое поле напряженностью $\vec{E}$, перпендикулярной облкадкам. Конденсатор замкнут проводом с нулевым сопротивлением. Какой ток идет по нему? Построй-

те график зависимости тока от времени. Зазор между обкладками мал по сравнению с их радиусом. (25 %)

4. В горизонтальной бетонной дорожке образовался глубокий провал метровой ширины (из-за убранной когда-то плиты). Оцените, с какой скоростью должен двигаться футбольный мяч, чтобы он все-таки преодолел этот провал. (50 %)

5. В жидкий азот опущены две пластины: металлическая и пенопластовая. Смоченная водой тряпка крепко примерзает к вынутой промороженной металлической пластине и очень плохо — к пенопластовой. Объясните явление. (34 %)

Публикацию подготовили В. Белоносов, М. Вишневский, Г. Меледин, В. Чуркин

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Шестой член арифметической прогрессии равен 10, а сумма первых шестнадцати членов этой прогрессии равна 200. Найдите двенадцатый член прогрессии.

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1.$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее возможные значения площади параллелограмма, произведение длин двух неравных высот которого равно 9, а величина острого угла параллелограмма не меньше 30° и не больше 45°.

4. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(5x+1)}{\log_3(7x-1)^2}\leqslant 1.$$

5. Найдите все рациональные значения параметра a, при которых функции

$$\sin\left(\frac{2ax}{a^2+\sqrt{12}}\right) \text{ и } \operatorname{tg}\left(\frac{2x}{1-2a+\sqrt{108}}\right)$$

имеют одинаковые периоды.

6. Вершина конуса лежит в плоскости основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, а окружность основания конуса вписана в четырехугольник, получившийся в сечении пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AD и BC основания пирамиды и делящей ребро SC в отношении 3:1, считая от вершины S. Найдите отношение объема конуса к объему пирамиды.

Вариант 2

1. На отрезке $[-2;\ 2]$ найдите наименьшее значение производной функции

$$y=-\frac{1}{3}x^3+x+1.$$

2. Дано число a. Найдите $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\times\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)$, если известно, что $\sin\alpha\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=a$.

3. Решите неравенство

$$\frac{\log_2\left(\frac{x}{2}\right)}{\log_2 x}-\frac{\log_2 x^2}{\log_2 x-1}\leqslant 1.$$

4. Боковые стороны AB и CD трапеции продолжены до пересечения в точке E. Точка O — центр описанной около треугольника ADE окружности. Найдите величину острого угла A трапеции, если известно, что точки A, B, C, D, O лежат на окружности, радиус которой в $\sqrt{3}$ раз меньше радиуса окружности, описанной около треугольника ADE.

5. Решите уравнение

$$\sqrt{35-2\sqrt{45-2x}}=x-5.$$

6. В правильную треугольную пирамиду $SABC$ вписана сфера. Отношение площади основания ABC пирамиды к площади поверхности сферы равно q. Плоскость, параллельная основанию пирамиды, касается сферы и отсекает от пирамиды $SABC$ пирамиду $SA_1B_1C_1$. Найдите отношение площадей полных поверхностей пирамид $SABC$ и $SA_1B_1C_1$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Материальная точка на плоскости совершает движение, которое может быть представлено в виде

$$x=a\cos\omega t,$$
$$y=b\cos(\omega t+\varphi_0),$$

где x и y — координаты точки в момент времени t, $a=4$ м, $b=8$ м, $\varphi_0=\pi$, $\omega=\pi$ с$^{-1}$. Определите траекторию движения точки.

2. На наклонной плоскости, образующей с горизонтальной плоскостью угол α, лежит брусок массой M, который упором удерживается от соскальзывания. В брусок попадает и застревает в нем пуля массой m, летевшая со скоростью v снизу вверх вдоль наклонной плоскости. Через какое время брусок вернется в исходное положение? Коэффициент трения между бруском и наклонной плоскостью μ.

3. Идеальный газ медленно переводят из состояния с объемом $V_1=32$ л и давлением $p_1=4{,}1\cdot10^5$ Па в состояние с объемом $V_2=9$ л и давлением $p_2=15{,}5\cdot10^5$ Па так, что во время сжатия давление изменяется в зависимости от объема по линейному закону $p=aV+b$, где a и b — постоянные. При каком объеме температура газа в этом процессе будет наибольшей?

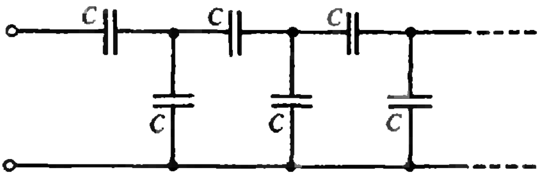


Рис. 1.

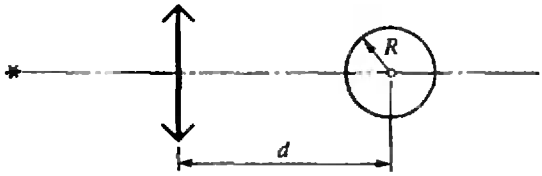


Рис. 2.

4. Пластины плоского конденсатора присоединены к источнику с ЭДС $\mathscr{E}=12$ В. Одна из пластин движется навстречу другой таким образом, что расстояние между ними меняется по закону $d(t)=0{,}1-20\,t$ (d — в метрах, t — в секундах). Определите направление тока и зависимость силы тока, текущего по цепи, от времени. Площадь пластин конденсатора $S=7{,}2\cdot10^{-3}$ м^2.

5. Определите емкость бесконечно длинной системы одинаковых конденсаторов емкостью C каждый, соединенных друг с другом, как показано на рисунке 1.

6. Оптическая система состоит из линзы с фокусным расстоянием F и зеркального шарика радиусом R (рис. 2). Определите расстояние от линзы до источника, если изображение источника совпадает с ним самим. Расстояние между линзой и шариком d.

Вариант 2

1. Найдите максимальный коэффициент полезного действия винтового домкрата, у которого силы трения не позволяют грузу опускаться.

2. На горизонтальной поверхности стола стоит широкий сосуд с водой. Высота уровня воды в сосуде h, масса сосуда вместе с водой M. В боковой поверхности сосуда у дна имеется круглое отверстие площадью S, закрытое пробкой. При каком значении коэффициента трения между дном сосуда и столом сосуд придет в движение, если вынуть пробку?

3. В цилиндрическом сосуде под поршнем при температуре T находится насыщенный пар. Определите массу сконденсировавшегося пара при изотермическом вдвигании поршня, если при этом совершена работа A. Молярная масса пара М.

4. Элемент с ЭДС $\mathscr{E}=6$ В дает максимальный ток $I_{max}=3$ А (при коротком замыкании). Какова наибольшая мощность, которая может быть выделена на внешнем сопротивлении?

5. В однородном магнитном поле находится плоский виток площадью S, расположенный перпендикулярно магнитным линиям. Какой ток потечет по витку, если поле будет убывать с постоянной скоростью 0 ? Сопротивление витка R.

6. Луч лазера мощностью $W=50$ мВт падает на поглощающую поверхность. Оцените силу светового давления луча на эту поверхность.

Публикацию подготовили А. Бортаковский, О. Суров

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin^3 x-\cos^3 x}=\sqrt{-\cos x}.$$

2. Сумма всех трехзначных чисел, составленных из трех различных отличных от нуля цифр k, l и m, больше 2700, но не превосходит 2900. Каждая из указанных цифр встречается в записи числа один раз. Найдите число $\overline{klm}$, если известно, что оно четное и наибольшее из всех трехзначных чисел, удовлетворяющих условиям задачи.

3. Решите уравнение

$$\log_3(31-|x^2-6x+5|)=c,\ c\in\mathbf{R}.$$

4. Через сторону PQ нижнего основания правильной треугольной призмы $PQRP_1Q_1R_1$ проведена секущая плоскость, пересекающая ребро RR_1 и разбивающая призму на два многогранника. Отношение объема многогранника, одной из граней которого является нижнее основание PQR призмы, к объему отсеченного многогранника, одной из граней которого является грань QQ_1P_1P, равно q. Найдите величину угла наклона секущей плоскости к плоскости нижнего основания, если известно, что величина угла между прямыми PQ_1 и RR_1 равна φ.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}5x=\sin^2 x\cdot\operatorname{tg}5x.$$

2. Имеются два сплава, состоящие из железа, никеля и хрома. Процентное содержание хрома в первом сплаве в 5 раз больше процентного содержания никеля во втором сплаве. Кусок первого сплава массой 200 г сплавили с куском второго сплава массой 400 г и получили сплав, содержащий q % никеля. Сколько граммов железа содержит новый сплав, если известно, что первый сплав содержит 30 % никеля, а второй сплав содержит 40 % железа?

3. Решите уравнение

$$-\log_5(2-|x-b|)=\log_{0,2}(5-x),\ b\in\mathbf{R}.$$

4. Правильная треугольная пирамида $SKLM$ пересечена плоскостью π, параллельной стороне ML основания пирамиды и ребру SK, причем точки S и K удалены от этой плоскости на расстояние, вдвое меньшее (каждая), чем пря-

мая ML. Длина высоты SP боковой грани MSK равна d, а боковое ребро SL образует с высотой SO пирамиды угол величиной β. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью π.

Публикацию подготовили А. Иванов, Н. Мирошин

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt{(x-1)y}=y\left(2+\sqrt{\dfrac{y}{x-1}}\right), \\ y^2+xy-5x+7=0. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\sin 2x+\sin x-1\geqslant\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

3. Решите уравнение

$$\log_2\left(\frac{x-1}{4x+3}\right)=3+\log_{16}x^4-\log_4(x-3)^2.$$

4. В треугольнике ABC точка E принадлежит медиане BD, причем $|BE|=3|ED|$. Прямая AE пересекает сторону BC в точке M. Найдите отношение площадей треугольников AMC и ABC.

5. При каких положительных значениях параметров a, b системы уравнений

$$\begin{cases} \log_3 x^2=b-\log_3 y, \\ (y+x)^2=a^2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ x^2+y^2=2x+2y+a^2 \end{cases}$$

имеют одинаковое число решений?

Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+y=7, \\ 2|x-1|+3|y+2|=17. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$1+\sin 4x-\cos 4x=2\sin 5x\cdot\cos x.$$

3. Две окружности с радиусами R и r касаются друг друга внешним образом в точке A. Общие касательные AD и BC к окружностям пересекаются в точке D. Докажите, что $|AD|^2=R\cdot r$.

4. Решите неравенство

$$\log_{x+2}(4-x)+\log_{(8+2x-x^2)}(x+2)^2\leqslant 2.$$

5. Определите, при каких значениях параметра a все действительные решения уравнения

$$x^4+(x+1)[(3a-2)x^2+(2a^2-a-3)(x+1)]=0$$

принадлежат отрезку $[-3;\ 0]$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Небольшое тело соскальзывает без начальной скорости с трамплина высотой H, нижняя часть которого горизонтальна и находится на высоте h над землей. Пренебрегая силами сопротивления, определите дальность полета тела. При каком значении h, считая $H=\text{const}$, дальность полета будет максимальной и чему она будет равна при этом?

2. Искусственный спутник запускается на околоземную орбиту с космодрома, находящегося на экваторе. Какую скорость относительно поверхности Земли нужно сообщить спутнику при запуске в направлении полюса? в западном направлении? в восточном?

3. Тело массой m, движущееся со скоростью v, налетает на покоящееся тело и после упругого столкновения отскакивает от него под углом 90° к первоначальному направлению движения со скоростью $2/3\,v$. Определите массу второго тела.

4. От груза массой M, висящего на пружине жесткостью k, отделилась его часть массой m. На какую максимальную высоту после этого поднимется оставшаяся часть груза?

5. Шарик подвешен на длинной нити. Первый раз его поднимают до точки подвеса и отпускают, второй раз его отклоняют на небольшой угол и тоже отпускают. В каком случае и во сколько раз быстрее шарик возвратится в начальное положение?

6. Оболочка воздушного шара объемом $V=1000$ м^3 наполнена гелием при температуре окружающего воздуха $t=27$ °C. Суммарная масса оболочки, тросов и корзины с аэронавтами $m=500$ кг. Определите силу сопротивления воздуха, если шар поднимается вверх с ускорением $a=2{,}2$ м/с^2. Относительные молекулярные массы гелия и воздуха равны соответственно 4 и 29. Давление гелия равно атмосферному давлению $p=10^5$ Па.

7. В сосуде объемом $V=20$ л, разделенном тонкой подвижной перегородкой на две части, поддерживается постоянная температура $t=100$ °C. В левой части сосуда находится $m_в=18$ г воды, в правой — $m_а=14$ г азота. Определите объем правой части сосуда, если давление насыщенных паров воды $p_н=10^5$ Па. Какой объем заняла бы вода, если бы она испарилась полностью?

8. Точечный источник света находится на дне сосуда с жидкостью, показатель преломления которой $n=1{,}8$. Во сколько раз максимальное время, затрачиваемое светом на прохождение слоя жидкости с последующим выходом в воздух, больше минимального времени?

9. Одна из пластин плоского воздушного конденсатора освещается светом с длиной волны $\lambda=0{,}5$ мкм. Выбитые светом электроны попадают на другую пластину конденсатора. Определите максимальную величину заряда, которую можно получить таким способом, если площадь пластин $S=1000$ см^2, расстояние между пластинами $d=2$ см, работа выхода электронов из металла $A=3\cdot10^{-19}$ Дж, заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

10. Сила тока, характеризующая поток электронов в электронно-лучевой трубке, $I=$

$=400$ мкА, ускоряющее напряжение $U=10$ кВ, отношение заряда электрона к его массе $\gamma=1{,}7\cdot 10^{11}$ Кл/кг. Найдите силу давления электронного пучка на экран трубки, полагая, что все электроны поглощаются экраном.

Публикацию подготовили М. Данилычева, М. Красненков, И. Матусевич, Е. Новикова, Л. Ромаскевич

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Вычислите без таблиц

$$(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{4})\cdot(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{28}+\sqrt[3]{16}).$$

2. Упростите и вычислите при $a=9$ и $b=\sqrt{2}$

$$a\cdot\frac{(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}})^2+(a^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{4}})^2}{a+\sqrt{ab}}.$$

3. Вычислите $(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$, если $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{3}{4}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

4. Вычислите без таблиц

$$\log_2\log_2\sqrt{\sqrt{2}}.$$

5. Решите уравнение

$$2x-\sqrt{x^2-x+4}=4.$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

6. Раствор содержит 40 г соли. После того, как в него добавили 200 г воды, концентрация соли уменьшилась в 1,5 раза. Найти первоначальную массу раствора в граммах.

7. Решите неравенство

$$\frac{1}{x+2}\geqslant\frac{3}{x-3}.$$

В ответе запишите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству.

8. Через вершину конуса проведено сечение под углом 30° к высоте конуса. Вычислите площадь сечения (в см²), если высота конуса равна $3\sqrt{3}$ см, а радиус основания равен 5.

9. Определите значение параметра a, при котором система уравнений

$$\begin{cases}ax-4y=a+1,\\ 2x+(a+6)y=a+3\end{cases}$$

не имеет решения.

10. Решите уравнение

$$\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1).$$

В ответе запишите корень уравнения, а в случае нескольких корней — их сумму.

11. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}3x=0.$$

В ответе запишите сумму (в градусах) корней уравнения, принадлежащих отрезку $[0;\pi]$.

12. В прямоугольной системе координат точка M имеет координаты x, y и z, равные длинам медиан прямоугольного треугольника. Найдите расстояние точки M от начала координат, если диаметр, описанной около треугольника окружности, равен $\sqrt{6}$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Тело, двигаясь равноускоренно и имея начальную скорость $v_0=2$ м/с, прошло за пятую секунду путь $l=4{,}5$ м. Определите путь, пройденный телом за $t=10$ с.*)

2. Полый шар из чугуна плавает в воде, погрузившись в нее ровно наполовину. Найдите объем внутренней полости шара. Масса шара $m=5$ кг, плотность чугуна $\rho_ч=7{,}8\times10^3$ кг/м³, ускорение силы тяжести $g=9{,}8$ м/с², плотность воды $\rho_в=10^3$ кг/м³.

3. Период колебаний математического маятника на Земле $T_З=1$ с. Чему будет равен период колебаний этого маятника на Луне? Масса Луны $M_Л$ в 81 раз меньше массы Земли $M_З$, а радиус Земли $R_З$ в 3,7 раза больше радиуса Луны $R_Л$.

4. Человек массой $m_1=60$ кг равномерно переходит в лодке с носа на корму. Длина лодки $l=3$ м. Определите массу лодки, если во время движения человека лодка переместилась на расстояние $s=1$ м. Лодка первоначально покоилась. Сопротивление воды не учитывать.

5. Стальной шар, падая свободно, достиг скорости $v=41$ м/с и, ударившись о землю, подскочил на высоту $h=1{,}6$ м. Определите изменение температуры шара при ударе, считая, что при ударе меняется только внутренняя энергия шара. Удельная теплоемкость стали $c=460$ Дж/(кг·К). Сопротивлением воздуха пренебречь.

6. Тепловой двигатель получает от нагревателя каждую секунду количество теплоты $Q_1=8200$ кДж и отдает холодильнику $Q_2=6200$ кДж. Найдите КПД двигателя. Ответ дайте в процентах.

7. Плоский конденсатор имеет площадь пластин $S=2000$ см². Расстояние между пластинами $d=0{,}5$ мм. К одной из обкладок прилегает пластина диэлектрика толщиной $d_1=0{,}3$ мм с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=7$. Остальное пространство внутри конденсатора заполнено воздухом. Определите емкость конденсатора. Ответ дайте, умножив результат на 10^9.

8. Определите падение напряжения на подводящих проводах, если на зажимах лампочки сопротивлением $R_1=10$ Ом напряжение $U_1=1$ В. ЭДС источника $\mathscr{E}=1{,}25$ В, его внутреннее сопротивление $r=0{,}4$ Ом.

*) Во всех задачах, где нет специальных указаний, ответ надо дать в СИ.

9. Электрон с массой $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг и зарядом $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B=0{,}015$ Тл со скоростью $v=10^3$ км/с под углом $\alpha=30°$ к направлению вектора индукции магнитного поля. Определите шаг винтовой линии, по которой движется электрон. Ответ дайте в сантиметрах.

10. Найдите абсолютный показатель преломления среды, в которой свет с энергией фотона $E=3\cdot10^{-19}$ Дж имеет длину волны $\lambda=0{,}44\cdot10^{-6}$ м. Постоянная Планка $h=6{,}6\times10^{-34}$ Дж·с.

Вариант 2

1. Снаряд вылетел из орудия со скоростью $v_0=200$ м/с под углом $\alpha=60°$ к горизонту. Через какое минимальное время вектор скорости снаряда будет составлять с горизонтом угол $\beta=45°$? Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

2. На тело массой $m=5$ кг действуют две силы, равные $F_1=3$ Н и $F_2=4$ Н и направленные под углом $\alpha=90°$ друг к другу. Найдите величину ускорения тела.

3. Камень падает с высоты $h=20$ м без начальной скорости. Какова будет скорость камня в тот момент, когда его потенциальная энергия уменьшится в $n=2$ раза по сравнению с первоначальным ее значением? Сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения $g=9{,}8$ м/с^2.

4. Каким должен быть наибольший объем льдины, плавающей в воде, если известно, что алюминиевый брусок объемом $V_а=0{,}1$ м^3, примерзший к льдине снизу, заставляет ее тонуть? Плотность льда $\rho_л=0{,}9\cdot10^3$ кг/м^3, плотность алюминия $\rho_а=2{,}7\cdot10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в=10^3$ кг/м^3.

5. Два соединенных тонкой трубкой баллона, объемы которых $V_1=7$ дм^3 и $V_2=12$ дм^3, содержат некоторое количество газа. Первый баллон имеет неизменную температуру $t_1=0$ °С. До какой температуры надо нагреть второй баллон, чтобы в нем осталось $n=1/3$ общего количества газа?

6. С какой скоростью должна вылететь из ружья свинцовая дробинка при выстреле, сделанном вертикально вниз с высоты $h=100$ м, чтобы при ударе о неупругое тело дробинка расплавилась? Начальная температура дробинки $T=500$ К, температура плавления $T_{пл}=600$ К, удельная теплоемкость свинца $c=0{,}13$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления $\lambda=25$ кДж/кг. Считать, что при ударе все тепло пошло на плавление дробинки.

7. Два одинаковых плоских воздушных конденсатора соединены последовательно в батарею. Во сколько раз увеличится емкость батареи, если один из конденсаторов заполнить диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$?

8. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них чайник вскипает за $\tau_1=10$ мин, а при включении только второй — за $\tau_2=15$ мин. За какое время (в минутах) вскипит чайник, если включить обе обмотки, соединив их параллельно?

9. Короткозамкнутая катушка, состоящая из $n=1000$ витков, помещена в магнитное поле, линии индукции которого направлены вдоль оси катушки. Индукция магнитного поля меняется со скоростью $\Delta B/\Delta t=5\times10^{-3}$ Тл/с. Площадь поперечного сечения катушки $S=40$ см^2, сопротивление катушки $R=160$ Ом. Найдите мощность тепловых потерь. Ответ дайте в мкВт (1 мкВт$=10^{-6}$ Вт).

10. Плоское зеркало поворачивают на угол $\alpha=35°$. На какой угол повернется при этом отраженный от зеркала луч? Ответ дайте в градусах.

Публикацию подготовили В. Докучаева, Б. Каширин, И. Поволоцкая

Журнал — читатель — журнал

Прежде всего мы хотим сказать большое спасибо всем читателям, которые прислали ответы на вопросы нашей анкеты. Конечно, у нас большие и очень представительные редакционная коллегия и редакционный совет, куда входят люди, связанные с большой наукой и со школой, со студенчеством и с педагогикой. Но без обратной связи, без живого отклика читателя и знания его сегодняшнего интереса нам не обойтись.

О чем же говорят анкеты?

Наибольшая часть нашей читательской аудитории — десятиклассники (по новой «нумерации»). Правда, у нас есть подозрение, что читатели-выпускники не очень активно откликнулись на нашу анкету (скорее всего, по причине занятости). Если так, то жаль — нам бы очень хотелось знать, какую еще помощь мы могли бы оказывать будущим абитуриентам. Вместе с тем довольно много откликов мы получили от школьников 5—7 классов, есть письма от четвероклассников и даже от... первоклассника Алеши Романова из Ярославля).

Конечно, за каждой анкетой — отдельный человек, со своими интересами, мнением, оценкой. Но из общей массы откликов складывается достаточно объективный анализ журнала и, как нам кажется, довольно объективный образ нашего читателя. Так что же нравится и что не нравится читателю в «Кванте»? Что, по его мнению, нужно изменить, что необходимо внести нового?

Круг интересов читателей охватывает все темы, которые мы считаем нашими: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика. Среди рубрик наибольшим спросом пользуется «Школа в «Кванте», потом идут «Задачник Кванта», и «Калейдоскоп», затем — «Варианты вступительных экзаменов» и «Математический кружок» и т. д.

Среди статей, напечатанных в журнале в 1989 году, наиболее интересными признаны:

«Пузыри в луже» (автор А. Митрофанов, № 6),
«XX лет спустя. Беседа с К. П. Феоктистовым» (№ 7),
«У попа была собака...» (С. Табачников, № 6),
«От нуля до декаллиона» (Н. Виленкин, № 3),
«Раз челнок, два челнок...» (В. Николаев, № 4),
«Криминальная геометрия, или Дело принципа» (Д. Фомин, № 8),
«Счастливые числа» (Р. Фейнман, № 7),
«Как индейцы бросают томагавк?» (В. Давыдов, № 11).

Лучшими обложками прошлого года большинство читателей назвали обложки номеров 9, 1 и 6. Очень много положительных откликов было на 2-ю страницу обложки номера 2 (репродукция картины С. Дали «Солнечный стол») и номера 6 («Арлекин» В. Вазарели).

Нас несколько озадачили встречающиеся в письмах довольно резкие отрицательные отзывы о рисунках в журнале. Многие пишут, что они «формальные, абстрактные». Конечно, мы не считаем оформление журнала идеальным, да и вообще это во многом дело вкуса. Но в одном и авторы, и художники, и редакция, как правило, сходятся: иллюстрации к статьям (те, что называются заставками) несут смысловую нагрузку, являются как бы художественным отображением со-

Из писем читателей

Уроки даже в специализированном физмат-классе слишком просты, чтобы для них можно было использовать ваши статьи. (10 кл., п. Краснореченск Дальнегорского р-на Приморского кр.)

Считаю, что этот журнал очень нужен учащимся школ, а также их учителям. Благодаря этому журналу в свое время закончил Красноярский филиал ЗФТШ при МФТИ, поступил на мех-мат. Самаркандского университета. (подписчик с 1972 года, математик-программист, преподаватель, г. Самарканд)

...все это для аспирантов, а не для школьников... В девяти случаях из десяти летит в макулатуру все, кроме вариантов. (учитель, г. Москва)

Избранные вопросы по элементарной математике и физике и приложение вопросов в задачах превращают журнал в энциклопедию для повседневной работы учителя в любом уголке нашей Родины. (учитель математики, физики и ИЗО, п. Якокут Алданского р-на Якутской АССР)

Не публиковать статей по информатике... Не публиковать фантастики. (9 кл., г. Тула)

Дорогой Квант! Пожалуйста, пиши побольше фантастических рассказов, желательно с космическими приключениями. (7 кл., г. Дербент Дагестанской АССР) держания. И мы вам советуем: прочитав статью, вернитесь к ее началу, вглядитесь в заставку, и, может быть, вы увидите ее новыми глазами.

Очень многие читатели жалуются на то, что журнал приходит с большим опозданием, некоторые подписчики в прошлом году получили не все номера. Нас это расстраивает, но, к сожалению, помочь вам в этом вопросе мы не можем, подобные срывы происходят не по нашей вине. Большая нагрузка, с которой работает Чеховский полиграфкомбинат, печатающий наш журнал, нередко приводит к срыву графика выпуска номеров; Министерство связи не всегда обеспечивает своевременную доставку журнала подписчикам. Мы неоднократно взывали к соответствующим инстанциям, однако ситуация не меняется. Остается лишь надеяться, что со временем она улучшится.

Судя по анкетам, круг вопросов, интересующих наших читателей, необычайно широк. Публиковать больше статей, рассказывающих о современных достижениях науки, о сегодняшних проблемах физики, математики и информатики, о замечательных ученых; шире освещать работу ВАКО; печатать научную фантастику; давать больше материалов для учащихся 5—8 классов (в частности, в «Школе в «Кванте» и в «Кванте» для младших школьников»); помещать в журнале кроссворды, головоломки, занимательные материалы; рассказывать о научных обществах учащихся;... — вот далеко не полный перечень пожеланий, высказанных читателями.

Надо сказать, что многие из этих предложений нами уже учтены. Так, мы планируем с нового учебного года ввести раздел, который пока условно называем «Для самых младших школьников». В нем будут помещаться занимательные задачи, требующие для решения сообразительности, смекалки и «житейской» логики, небольшие заметки, в самой доступной форме рассказывающие про интересные вопросы математики и физики. Мы будем продолжать раздел «Игры и головоломки» и надеемся на ваше активное участие (с интересом ждем, какие складные конструкции пришлют

Из писем читателей

Неужели нельзя найти хороших художников, которые будут делать красивые рисунки! (11 кл., г. Днепропетровск)

Хочу поблагодарить художников за иллюстрации; до чего остроумно, мастерски и мило оживляют они страницы журнала. (студентка художественно-графического факультета Удмуртского ГУ, г. Ижевск)

Журнал, по-моему, скучен, и задачи не очень интересны... Я надеялась на лучшее. (10 кл., г. Тбилиси)

Меня журнал вполне устраивает, всегда есть материал для раздумий. (9 кл., г. Аркалык Кустанайской обл. Казахской ССР)

В последние годы слишком большое внимание приобрел раздел, связанный с программированием... тем более что во многих школах страны нет вычислительных машин. (подписчик с 1979 года, г. Верхняя Тура Свердловской обл.)

АНКЕТА 3 — 90

Сегодня мы начинаем новый раунд «прямых переговоров» с читателем.
Ответьте, пожалуйста, на вопросы анкеты (на те, на которые Вы хотите и можете ответить), вырежьте анкету и пришлите в редакцию; на конверте напишите «Анкета 3 — 90».

1. Класс, в котором Вы учитесь: ______________________________

Ваша профессия (если Вы работаете): ______________________________

круг интересов: физика, математика, астрономия, космонавтика, информатика (подчеркните).

2. Какие разделы журнала для Вас наиболее интересны? ______________________________

____

3. Какие статьи и задачи из номеров 1—3 (номер укажите) Вам понравились? ______________________________

____

читатели на конкурс, объявленный в этом номере журнала; см. 4-ю страницу обложки). Мы планируем регулярно печатать фантастические рассказы, и не только с космическими приключениями. Так, в майском номере начнется публикация рассказа американского писателя и педагога Д. Киза «Цветы для Элджернона». В следующем номере мы открываем новый цикл материалов, который можно условно назвать «Письма о физике». Это будут статьи, написанные учеными, физиками-профессионалами, в которых, мы надеемся, будут ответы на «глобальные» вопросы, интересующие многих наших читателей: в каких направлениях развивается современная физика? что такое современный физический эксперимент? чем занимаются ученые в физических институтах? как стать физиком?... В этом году (скорее всего, с начала учебного года) будет расширен раздел «Избранные школьные задачи» — там появятся задачи по физике. Больше внимания мы постараемся уделять вопросам астрономии, космонавтики...

Как видите, планы у нас обширные. Насколько удачна будет их реализация — покажут будущие номера. А мы сможем узнать об этом из ваших ответов на вопросы анкеты, которая, как и прежде, будет помещаться в каждом последнем номере квартала (в 3, 6, 9 и 12). Очень надеемся на обратную связь!

Напоминаем, что подписаться на наш журнал можно, начиная с любого номера (но — до первого числа предподписного месяца). Индекс «Кванта» в каталоге «Союзпечати» 70465, цена одного номера 45 копеек.

Из писем читателей

Вследствие того, что по программированию очень мало литературы и ее очень трудно достать, полезно было бы печатать учебные статьи на разных языках в отделе «Информатика и программирование». (11 кл., г. Москва)

Давайте больше нужных для школы статей, не занимайте страницы журнала разными головоломками и несерьезными материалами». (8 кл. г. Курган)

Хочу, чтобы в каждом номере хоть одна страничка была смешной и развлекательной. (5 кл., г. Каменка Пензенской обл.)

АНКЕТА 3 — 90

Вы использовали при подготовке к уроку? ______

4. Решаете ли Вы задачи из «Задачника «Кванта»? ______
Участвуете ли Вы в конкурсе «Задачник «Кванта»? ______

5. Какая обложка из номеров 1—3 Вам больше всего понравилась? ______
Какая иллюстрация из номеров 1—3 (укажите номер и страницу) Вам больше всего понравилась? ______

6. Ваши общие замечания и пожелания: ______

Ответы, указания, решения

[redacted]сибирский государственный
[redacted]ерситет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. 8 ч, 16 ч.

2. $\operatorname{arctg}\frac{5\pm\sqrt{46}}{7}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. Указание. Выполните замену $y=\operatorname{tg}x$.

3. $6\sqrt{55}$. Указание. Так как $\angle PAE=\angle APE$, то $AE=PE$. Аналогично, $DF=QF$. Следовательно, данная трапеция — равнобедренная.

4. -4, -8. Указание. Минимум функции $y=|a-2x|-|x+3|$ достигается в точке $x=\frac{a}{2}$, при этом $y=-\left|\frac{a}{2}+3\right|$. Исходное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $y=-1$.

5. 1:1. Указание. Пусть E и F — точки пересечения данной плоскости с AB и $A'B$ соответственно; BO — перпендикуляр к плоскости $CB'E$. Треугольник BFO — прямоугольный, причем $\angle BFO=60°$. Пусть $BE=x$. Тогда $BF=\frac{x\sqrt{2}}{x+1}$, $BO=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$. Из равенства $BO=BF\cdot\sin 60°$ получаем уравнение относительно x.

Вариант 2

1. 67 212, 67 716. Указание. Число делится на 36, если оно делится на 4 и на 9. Из признака делимости на 9 следует, что $14+m+n$ делится на 9, а число $10+n$ делится на 4.

2. $\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$. Указание. Уравнение равносильно системе $2\sin^2x=5\cos x-1$, $\sin x\geqslant 0$.

3. $10\sqrt{3}$. Указание. Пусть L, M, N—точки касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со сторонами AB, BC и AC соответственно. Тогда $BC=2\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}\cos 60°=7$, $AL=AK=\sqrt{3}\operatorname{ctg}30°=3$. Полупериметр треугольника ABC равен

$$\frac{AL+BL+BM+MC+CK+KA}{2}=AL+BC=10.$$

4. $6<x<8$, $x\neq 2\pi$, $x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi$. Указание. Данное неравенство эквивалентно системе

$$\begin{cases} x^2-14x+73>0,\\ x^2-14x+73<32,\\ x\neq k\pi,\ x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi,\ k,n\in\mathbb{Z}.\end{cases}$$

откуда $6<x<8$, $x\neq 2\pi$, $x\neq\frac{\pi}{2}+2\pi$.

5. $\frac{2}{\sqrt{41}}$. Указание. Прямая, параллельная BM и проходящая через точку A, пересекает продолжения сторон CB и CD в точках L и K соответственно. Прямая LN пересекает ребро BB' в точке P, отрезок BQ перпендикулярен KL. Высота BH прямоугольного треугольника PBQ перпендикулярна прямым AN и BM. Находим $PB=\frac{1}{3}$, $BQ=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, откуда $BH=\frac{2}{\sqrt{41}}$.

Вариант 3

1. 3 кг, 7 кг.

2. $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

3. $8+2\sqrt{7}$. Указание. В треугольнике BOC, где O — точка пересечения медиан, последовательно находим $BO=\frac{2}{3}BM$, $CO=\frac{2}{3}CN$. Далее, $OH'=\frac{1}{3}AH$, после чего находим отрезки BH', CH' и сторону BC.

4. $4\leqslant x<29$. Указание. Выполните замену $y=\sqrt{x-4}$, после чего решите относительно y полученное неравенство.

5. $\operatorname{arctg}\frac{4}{\sqrt{5}}$. Указание. Пусть точка N задана условием $MN\parallel BC$, $CN\parallel BM$, K — проекция точки N на плоскость $ABCD$, L — проекция точки K на прямую AC. Искомый угол равен углу KNL и вычисляется по катетам $KN=1$, $KL=\frac{4}{\sqrt{5}}$.

Физика

Вариант 1

1. При отсутствии внешних сил имеем: $-ma_1+Ma+ma_2=0$, откуда

$$a=(a_1-a_2)m/M.$$

2. После соединения на внешней поверхности каждого диска окажется один и тот же заряд $q=(q_1-q_2)/2$, распределенный с поверхностной плотностью $\sigma=(q_1-q_2)/(2\pi R^2)$. На соприкасающихся поверхностях зарядов не будет. После небольшого разведения распределение зарядов практически не изменится. Напряженность поля, создаваемая одним диском,

$$E=\sigma/(2\varepsilon_0)=(q_1-q_2)/(4\pi\varepsilon_0R^2).$$

Поле одного диска действует на заряд другого с силой

$$F=qE=(q_1-q_2)^2/(8\pi\varepsilon_0R^2).$$

3. Согласно закону Фарадея, из-за изменения магнитного потока через всю площадь прямоугольника возникает ЭДС $\mathscr{E}=\Delta\Phi/\Delta t=\alpha ab$. По закону Ома $\mathscr{E}=IR=I\cdot 2\rho(a+b)$, где ρ — сопротивление единицы длины провода. Отсюда

$$I=\frac{\alpha ab}{2\rho(a+b)}.$$

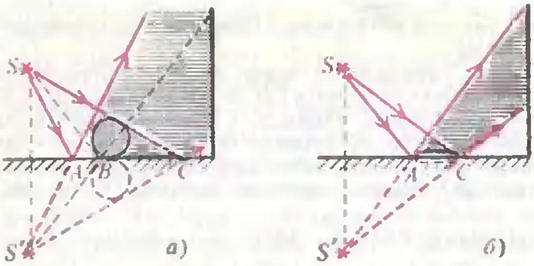


Рис. 1.

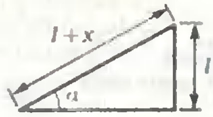


Рис. 2.

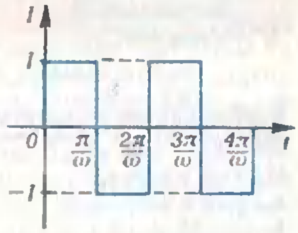


Рис. 3.

В контуре, образуемом вольтметром и участком провода с сопротивлением $R_1=\rho(2c+a)$, создается ЭДС $\mathscr{E}_1=\alpha ac$. По закону Ома $\mathscr{E}_1=U+IR_1$. Отсюда показание вольтметра

$$U=\mathscr{E}_1-IR_1=\frac{\alpha a^2(2c-b)}{2(a+b)}.$$

4. Из закона Менделеева—Клапейрона имеем $\rho=pM/(RT)$. Оценивая грубо $M\sim M_{CO_2}\sim 40\cdot 10^{-3}$ кг/моль, $p\sim 10^5$ Па, $R\approx 8$ Дж/(моль·К), $T\sim 10^3$ К, получаем

$$\rho\sim 0{,}5\ \text{кг/м}^3\lesssim\rho_{\text{возд}}.$$

5. Шарик стоит на пути AB (рис. 1, *а*) части светового потока, отраженного от зеркала, создавая при этом тень на экране. Вторая тень получается из-за того, что шарик загораживает от источника часть зеркала BC, куда свет не попадает и соответственно не отражается на экран. Во втором случае (рис. 1, *б*) свет на экран отражает все зеркало, кроме участка AC, занятого тонкой шайбой.

Вариант 2

1. Плавая, кубик вытесняет массу жидкости $\rho S\Delta h$, равную собственной массе $\rho_1 a^3$. Отсюда

$$\Delta h=\rho_1 a^3/(\rho S).$$

2. По второму закону Ньютона

$$mv^2/l=T-mg\cos\alpha,$$

где T — натяжение нити в момент сдвига бруска, а v — скорость груза; по закону сохранения энергии

$$mv^2/2=mgl\cos\alpha.$$

Отсюда

$$T=3mg\cos\alpha.$$

Сдвиг получается при условии

$$T\sin\alpha\geqslant\mu(Mg+T\cos\alpha),$$

откуда

$$M=\frac{3m}{\mu}\cos\alpha(\mu\sin\alpha-\cos\alpha)\ \text{при}\ \mu>\operatorname{tg}\alpha.$$

3. Используя принцип суперпозиции, легко найти связь между значениями заряда на кольце (или на сфере) и потенциала в его центре:

$$\varphi_0=k\left(\frac{\Delta q_1}{R}+\frac{\Delta q_2}{R}+\ldots+\frac{\Delta q_N}{R}\right),$$

где R — радиус, а $\Delta q_1, \ldots, \Delta q_N$ — доли зарядов, на которые разбит весь заряд так, чтобы для каждого участка, занятого долей заряда, можно было использовать выражение потенциала точечного заряда $\Delta\varphi=k\Delta q/R$. Отсюда заряд на кольце

$$q=\varphi_0 R/k.$$

В заземленном проводящем шаре заряд, как известно, расположен на поверхности, напряженность поля внутри шара равна нулю, а потенциал всюду одинаков и равен нулю, в том числе — и в центре шара. Суммируя вклады от распределенных по кольцу и по шару зарядов, получаем

$$0=k\frac{q}{\sqrt{a^2+b^2}}+k\frac{Q}{b},$$

откуда находим искомый заряд шара

$$Q=-\varphi_0\frac{ab}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+b^2}}.$$

4. Кинетическая энергия молекулы водорода $mv^2/2=5/2kT$, т. е. квадраты скоростей молекул, находящихся при одинаковой температуре, обратно пропорциональны их массам. Таким образом, $v_{H_2}\sim v_{\text{возд}}/\sqrt{m/M}\sim 300\sqrt{14}$ м/с ~ 1200 м/с. (Скорость молекул воздуха принята близкой к скорости звука.)

5. Главный эффект, не дающий свету уйти через боковые поверхности стержня,— полное внутреннее отражение, превращающее стержень в световод. Свет, попавший в стержень, в значительной доле выходит через торец у экрана и создает на нем яркое пятно.

Вариант 3

1. Искомая работа

$$A=p_2(V_3-V_2)=\frac{m}{M}R(T-T/n).$$

2. Пусть удлинение пружины к моменту отрыва тела равно x. Тогда (рис. 2) $\sin\alpha=l/(l+x)$. В момент отрыва сила тяжести mg уравновешивается вертикальной составляющей силы натяжения пружины $kx\sin\alpha$, откуда

$$x=mgl/(kl-mg).$$

По закону сохранения энергии

$$mv^2/2=kx^2/2.$$

Отсюда находим

$$v=x\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{mgl}{kl-mg}\sqrt{\frac{k}{m}}\ \text{при}\ kl>mg.$$

3. Обкладки конденсатора закорочены, значит, внутри поле равно нулю. Поэтому на обкладках должны индуцироваться заряды $\pm q$, создающие поле, точно компенсирующее внутри конденсатора внешнее поле, т. е. $q=\sigma S=E\varepsilon_0 S$. Площадь обкладок из-за вращения полудисков меняется. За время Δt прирост площади $\Delta S=r^2\Delta\alpha/2=r^2\omega\Delta t/2$. Отсюда ток

$$I=\Delta q/\Delta t=E\varepsilon_0\Delta S/\Delta t=\varepsilon_0 E r^2\omega/2.$$

График зависимости тока от времени (с учетом малости зазора) изображен на рисунке 3.

4. За время полета $t\sim l/v$ мяч опустится на глубину $h=gt^2/2\sim(g/2)(l/v)^2$. В соответствии с правилом упругого отскока (когда угол падения равен углу отражения), если радиус, проведенный из центра опустившегося мяча в вершину прямого угла плиты, образует с вертикалью угол $\alpha\geqslant 45^\circ$, то мяч преодолеет препятствие. В противном случае произойдет отскок назад. Таким образом, в критическом случае глубина опускания мяча $h=R(1-1/\sqrt{2})\approx\approx 0{,}3R$. Отсюда

$$v\sim l\sqrt{g/(2h)}\sim 13 \text{ м/с при } R\approx 0{,}1 \text{ м}, \quad g=10 \text{ м/с}^2,\ l=1 \text{ м}.$$

5. Теплопроводность металла много выше, чем пенопласта. Это легко почувствовать, взяв в руки кусок металла и пенопласта: металл кажется холодным (хорошо отводит тепло), а пенопласт — теплым (тепло отводится плохо). В тряпке, прикоснувшейся к промерзшему металлу, вода сразу же замерзает, и тряпка прилипает к нему. А через пенопласт отбор тепла от тряпки практически не происходит, и она не примораживается.

[redacted]овский авиационный институт [redacted]ерго Орджоникидзе

Математика

Вариант 1

1. 16.

2. $\frac{\pi(4n+1)}{4}$, $\pi k - \operatorname{arctg} 2$, $k, n\in Z$.

3. $18, 9\sqrt{2}$. Указание. Пусть h_a и h_b — высоты параллелограмма, опущенные на стороны a и b соответственно. Тогда $S=ab\sin\alpha=\frac{S}{h_a}\cdot\frac{S}{h_b}\sin\alpha$, откуда $S=\frac{h_a h_b}{\sin\alpha}$, т. е. $S=\frac{9}{\sin\alpha}$. Из условия следует, что $9\sqrt{2}\leqslant S\leqslant 18$.

4. $\left(-\frac{1}{5};\ 0\right)\cup\left(0;\ \frac{1}{7}\right)\cup\left(\frac{1}{7};\ \frac{2}{7}\right)\cup\left[\frac{19}{49};\ \infty\right]$.

Указание. Неравенство равносильно такому: $\log_{(7x-1)^2}(5x+1)\leqslant 1$. В свою очередь, неравенство $\log_{a^2}b\leqslant 1$ равносильно системе $(a^2-1)(b-a^2)\leqslant 0$, $a\neq 0$, $a\neq\pm 1$, $b>0$.

5. 0; -1; $1/3$. Указание. Прежде всего, $a=0$ удовлетворяет условию. При $a\neq 0$ числа $T_n=\frac{2\pi n(a^2+\sqrt{12})}{2a}$ и $S_k=\frac{\pi k(1-2a+\sqrt{108})}{2}$ при любых целых n и k являются периодами первой и второй функций соответственно. Для равенства $T_n=S_k$ необходимо, чтобы число

$$\frac{a(1-2a+\sqrt{108})}{2(a^2+\sqrt{12})}=\frac{a(a^2(1-2a)-36)+2a(3a^2+2a-1)\sqrt{3}}{2(a^4-12)}$$

было рациональным. А это возможно лишь при таких рациональных a, для которых $a(3a^2+2a-1)=0$.

6. $\frac{\pi\sqrt{3}}{32}$. Указание. Пусть $KLMN$ — равнобедренная трапеция, в которую вписано основание конуса (рис. 4), причем $AB=1$. Тогда $MN=3/4$, а высота FO трапеции равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Проведем сечение через высоту SO и апофему SE пирамиды $SABCD$ (рис. 5). Из подобия треугольников FEG и SEO находим $EG=1/8$. По теореме Пифагора $FG=\frac{\sqrt{39}}{8}$, а затем и $SO=\frac{\sqrt{39}}{2}$. Далее, из подобия треугольников FGO и PQO находим высоту конуса $PQ=\frac{\sqrt{13}}{4}$.

Вариант 2

1. $y'_{\min}=y'(-2)=y'(2)=-3$.

2. $a+\frac{1}{2}$. Указание. $a=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sin 2\alpha+1}{2}$.

3. $\left(0;\ \frac{1}{2}\right]\cup(1;\ \sqrt{2}]\cup(2;\ \infty)$. Указание. Выполните замену $y=\log_2 x$.

4. 75°. Указание. Из условия следует, что трапеция $ABCD$ и треугольник ADE (рис. 6) —

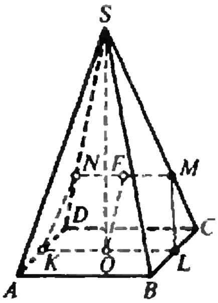


Рис. 4.

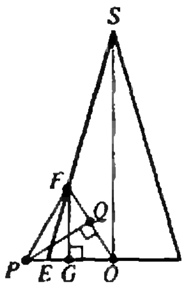


Рис. 5.

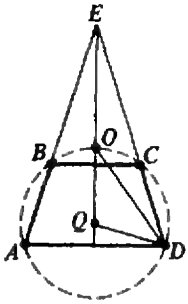


Рис. 6.

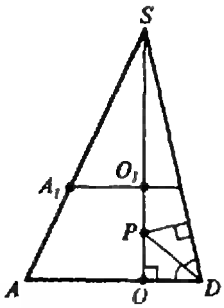


Рис. 7.

равнобедренные. Пусть O и Q — центры окружностей, описанных около треугольника AED и трапеции $ABCD$ соответственно. Тогда $\angle QOD = 30°$, а $\angle DEQ = 15°$.

5. 10. **Указание.** Пусть $y = x - 5$, $z = \sqrt{45 - 2x}$. Тогда

$$\begin{cases} y^2 = 35 - 2z, \\ z^2 = 35 - 2y. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, приходим к соотношению $(y - z)(y + z - 2) = 0$. Дальнейшее ясно.

6. $16\pi^2 q^2/27$. **Указание.** Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту SO и апофему SD грани SBC (рис. 7). Пусть P — центр вписанной сферы, $OD = 1$, $\angle SDO = \alpha$. Тогда $OP = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{4\pi q}}$, но $SO = \operatorname{tg}\alpha$, причем $SO_1 = SO - 2PO$. Искомое отношение поверхностей пирамид равно k^2, где $k = \frac{SO_1}{SO} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha - 2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

Физика

Вариант 1

1. Точка движется по отрезку прямой $y = -2x$, концы отрезка имеют координаты $(-4;\ 8)$ и $(4;\ -8)$.

2. $t = \frac{mv}{g(m+M)}\left(\frac{1}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha - \mu^2\cos^2\alpha}}\right)$; если $\mu > \operatorname{tg}\alpha$, брусок не вернется в исходное положение.

3. $V(T_{max}) = (p_2V_1 - p_1V_2)/(2(p_2 - p_1)) = 20{,}1$ л.

4. $I(t) = 1{,}53\cdot 10^{-11}/(0{,}1 - 20t)^2$; ток заряжает конденсатор.

5. $C_{общ} = (\sqrt{5} - 1)C/2$.

6. Возможны два варианта: $l = Fd/(d - F)$ или $l = F(d - R)/(d - R - F)$.

Вариант 2

1. $\eta_{max} = 50\ \%$.

2. $\mu < 2\rho hS/M$, где ρ — плотность воды.

3. $m = AM/(RT)$, где R — универсальная газовая постоянная.

4. $P_{max} = \mathscr{E} I_{max}/4 = 4{,}5$ Вт.

5. $l = vS/R$.

6. $F = W/c \approx 1{,}7\cdot 10^{-10}$ Н, где c — скорость света.

[redacted]ковский инженерно-физический институт
[redacted]тематика

Вариант 1

1. $\pi(2n+1)$, $2\pi n - \frac{\pi}{4}$, $n \in Z$. **Указание.** Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^2 x(\sin x + \cos x) = 0, \\ \cos x \leqslant 0. \end{cases}$$

2. 832. **Указание.** Сумма всех трехзначных чисел, составленных из цифр k, l, m, равна $222(k + l + m)$. Из условия следует, что $12\frac{36}{222} < k + l + m < 13\frac{14}{222}$, т. е. $k + l + m = 13$. Пусть k — цифра сотен. При $k = 9$ требуемого числа нет, а при $k = 8$, $l = 3$ и $m = 2$ все условия выполняются.

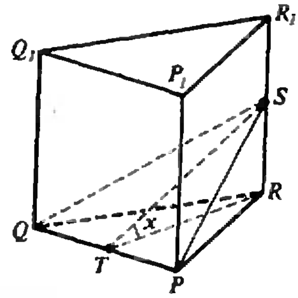


Рис. 8.

3. $3 \pm \sqrt{35 - 3^c}$ при $c < 3$; $3 \pm \sqrt{35 - 3^c}$, $3 \pm \sqrt{3^c - 27}$ при $3 \leqslant c \leqslant \log_3 31$; при $c > \log_3 31$ корней нет. **Указание.** Исходное уравнение равносильно уравнению $|x^2 - 6x + 5| = 31 - 3^c$, из которого, в свою очередь, получаем совокупность из двух уравнений $x^2 - 6x + 3^c - 26 = 0$ и $x^2 - 6x + 36 - 3^c = 0$ при условии $c \leqslant \log_3 31$. Осталось решить полученные уравнения.

4. $\operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3q}}{1+q}\operatorname{ctg}\varphi\right)$ при $0 < q \leqslant \frac{1}{2}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. **Указание.** Пусть секущая плоскость пересекает боковое ребро $RR_1 = l$ в точке S (рис. 8). T — середина QP. Тогда $PQ = l\operatorname{tg}\varphi$, $RT = l\operatorname{tg}\varphi\frac{\sqrt{3}}{2}$, $V = V_{SPQR} = \frac{1}{4}l^3 \times \operatorname{tg}^3\varphi\cdot\operatorname{tg}x$, $V_1 = V_{PQRP_1Q_1R_1} = \frac{\sqrt{3}}{4}l^3\operatorname{tg}^2\varphi$. Поскольку $\frac{V - V_1}{V_1} = \frac{1}{q}$, то после несложных преобразований приходим к уравнению

$$\frac{2\sqrt{3q}}{1+q}\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{tg}x,$$

откуда $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3q}}{1+q}\operatorname{ctg}\varphi\right)$, причем задача имеет решение при $0 < q \leqslant \frac{1}{2}$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Вариант 2

1. $\frac{\pi n}{5}$, $n \in Z$.

2. $15(30 - q)$ при $10 < q < \frac{58}{3}$.

3. $[3;\ 5)$ при $b = 3$, $\frac{(b+3)}{2}$ при $3 < b < 7$. При остальных значениях b решений нет.

4. $\frac{8d^2\sqrt{3}\sin\beta}{1 + 3\cos^2\beta}$.

[redacted]ковский институт радиотехники, электро[redacted]и и автоматики

Математика

Вариант 1

1. $(1{,}4;\ 0)$, $(2;\ 1)$.

2. $\pi+2\pi k$, $[\frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5}{6}\pi+2\pi k]$, $k\in Z$.
3. -1.
4. *2:5*. **Указание.** Площади треугольников с одинаковыми высотами и разными основаниями относятся как длины оснований.
5. При $2\cdot 3^b<a<\sqrt{2\pi(\pi-2)}$ системы имеют по 4 решения. **Указание.** Воспользуйтесь графической интерпретацией решений системы уравнений.

Вариант 2

1. $(2; 3)$, $\left(\frac{23}{4}; -\frac{9}{2}\right)$.
2. $\frac{\pi}{2}k$, $\frac{1}{2}\left((-1)^k \arcsin\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{4}\right)+\pi k\right)$, $k\in Z$.
3. **Указание.** Ясно, что $AD=BD=CD$, а $BC=\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2}=2\sqrt{Rr}$.
4. $(1-2\sqrt{2}; -1[1\cup 1; 3]\cup(1+2\sqrt{2}; 4)$.
5. $a\in\left[3; \frac{7}{2}\right]$. **Указание.** Уравнение является квадратным относительно $t=\frac{x^2}{x+1}$. Далее используйте расположение корней квадратных уравнений $x^2-t_1x-t_1=0$, $x^2-t_2x-t_2=0$.

Физика

1. $l=2\sqrt{(H-h)h}$; $h(l_{max})=H/2$; $l_{max}=H$.
2. $v_п=v_I=7900$ м/с; $v_з=v_I+v=8365$ м/с; $v_в=v_I-v=7435$ м/с; здесь $v_I=\sqrt{gR_З}=7900$ м/с — *первая космическая скорость*, $v=2\pi R_З/T=465$ м/с — линейная скорость точек экватора ($R_З=6{,}4\cdot 10^6$ м — радиус Земли, $T=24$ ч — период обращения Земли вокруг собственной оси).
3. $M=13/5\ m$.
4. $h_{max}=2mg/k$.
5. $t_2/t_1=\pi/2\sqrt{2}=1{,}1$.
6. $F_c=\frac{pM_2gV}{RT}-\left(\frac{pM_1V}{RT}+m\right)(g-a)=3{,}9\times 10^2$ Н; здесь $M_1=4\cdot 10^{-3}$ кг/моль и $M_2=29\cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярные массы гелия и воздуха соответственно, $R=8{,}31$ Дж/(моль$\times$К) — *универсальная газовая постоянная*.
7. $V_а=m_аRT/(M_аp_н)=15{,}5$ л, где $R=8{,}31$ Дж/(моль$\cdot$К) — универсальная газовая *постоянная*, $M_а=28\cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса азота; $V'_в=m_вRT/(M_вp_н)=31$ л, где $M_в=18\cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воды.
8. $t_{max}/t_{min}=n/\sqrt{n^2-1}=1{,}2$.
9. $q_{max}=\frac{\varepsilon_0 S}{ed}\left(\frac{hc}{\lambda}-A\right)=2{,}7\cdot 10^{-11}$ Кл; здесь $\varepsilon_0=8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м — *электрическая постоянная*, $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж$\cdot$с — постоянная Планка, $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света.
10. $F_д=I\sqrt{2U/\gamma}=13{,}7\cdot 10^{-7}$ Н.

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. 3. 2. 6. 3. 0,8. 4. —3. 5. 4. 6. 400. 7. 2. 8. 24. 9. —4. 10. 3. 11. 360. 12. 3.

Физика

Вариант 1

1. $l_5=v_0t+at^2/2=47{,}8$ м, где $a=2(l-v_0(t_5-t_4))/(t_5^2-t_4^2)$ (здесь $t_4=4$ с, $t_5=5$ с).
2. $V_{вн}=m(2/\rho_а-1/\rho_ж)=9{,}4\cdot 10^{-3}$ м^3.
3. $T_Л=T_З\frac{R_Л}{R_З}\sqrt{\frac{M_З}{M_Л}}=2{,}4$ с.
4. $m_2=m_1(l-s)/s=120$ кг.
5. $\Delta t=(v^2-2gh)/(2c)=1{,}8$ К.
6. $\eta=(1-Q_2/Q_1)100\%=24\%$.
7. $C=\varepsilon_0\varepsilon S/(d_1+\varepsilon(d-d_1))=7{,}3\cdot 10^{-9}$ Ф (здесь $\varepsilon_0=8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная); ответ: 7,3.
8. $U_2=\mathscr{E}-U_1(1+r/R_1)=0{,}21$ В.
9. $h=(2\pi mv\cos\alpha)/(eB)=0{,}2$ см.
10. $n=hc/(E\lambda)=1{,}5$ (здесь $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме).

Вариант 2

1. $t_{min}=v_0(\sin\alpha-\cos\alpha\ \mathrm{tg}\ \beta)/g=7{,}3$ с.
2. $a=\sqrt{F_1^2+F_2^2}/m=1$ м/с^2.
3. $v=\sqrt{gh}=14$ м/с.
4. $V_л=V_а(\rho_а-\rho_в)/(\rho_в-\rho_л)=1{,}7$ м^3.
5. $T_2=T_1(1-n)V_2/(nV_1)=936$ К.
6. $v=\sqrt{2(c(T_{пл}-T)+\lambda-gh)}=272$ м/с.
7. $C_2/C_1=2\varepsilon/(\varepsilon+1)=1{,}33$.
8. $\tau_3=\tau_1\tau_2/(\tau_1+\tau_2)=6$ мин.
9. $P=(nS\ \Delta B/\Delta t)^2/R=2{,}5$ мкВт.
10. $\beta=2\alpha=70°$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 2)

1. Пусть на дереве a веток. Тогда $3a+1=4(a-1)$. Отсюда $a=5$; веток на дереве 5, значит, птиц — 16.
2. Если номер оканчивается на 0, то, очевидно, единственным ответом будет номер 50—50. Если же номер *не оканчивается* на 0, то последние цифры его двузначных составляющих имеют одинаковую четность, а первые — разную. Поскольку сумма двух цифр одной четности не может быть равна сумме четной и нечетной цифр, счастливых номеров в таких двух смыслах не существует.
3. БАОБАБ=910919.
4. Нет. В первой последовательности все числа, кроме первого,— четные, а во второй — нечетные.
5. Заметим сначала, что у любой пятиугольной звезды сумма углов при синих вершинах равна 180°. Действительно (см. рис. 9),

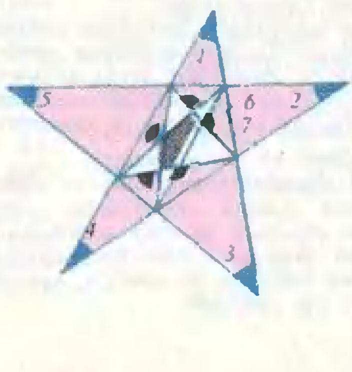


Рис. 9.

$\angle 6 = \angle 5 + \angle 3$ и $\angle 7 = \angle 1 + \angle 4$ как внешние углы треугольников, но $\angle 6 + \angle 7 + \angle 2 = 180^\circ$, следовательно, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$. А сумма углов при черных вершинах равна сумме внутренних углов пятиугольника и равна 540°. Во вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180°, следовательно, в пяти таких четырехугольниках эта сумма равна 900°. Но эта сумма равна сумме черных и синих углов, т. е. $540^\circ + 180^\circ = 720^\circ$. Значит, все красные четырехугольники не могут быть вписанными.

[redacted]ейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 2)

Вопросы и задачи

1. Оконное стекло можно представить как плоскопараллельную пластинку, состоящую из двух одинаковых призм (рис. 10), одна из которых разлагает, а другая — восстанавливает белый свет.

2. Сперва появится красная часть спектра, а за ней по мере нагревания — все остальные.

3. От синего, так как оно полнее, чем красное стекло, поглощает длинноволновое излучение и, следовательно, быстрее нагреется.

4. Желтую или черную.

5. Чем больше поглощательная способность тела, тем больше его излучательная способность.

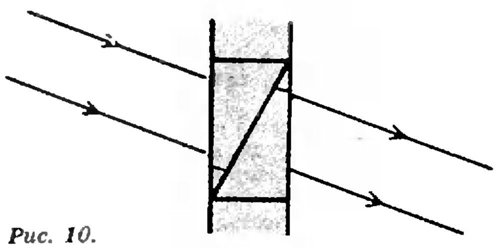


Рис. 10.

6. Поглощаются практически все лучи видимого света.

7. Спектр сжат в красной части и растянут в фиолетовой.

8. Спектр смещается в сторону красного цвета.

9. Синие: их излучение в большей степени рассеивается воздухом.

10. Днем рассеянный небом голубой свет добавляется к желтоватому свету самой Луны, и это смешение воспринимается глазом как белый свет.

11. Нет, для этого нужны излучения с более короткой длиной волны.

12. На декорации, покрытые люминофором, направляют ультрафиолетовые лучи.

13. Нельзя. Изменение знака зарядов не приведет к изменению частот излучения, соответствующих спектральным линиям.

Микроопыт

Свет в молоке рассеивается на очень малых частицах. Синяя компонента рассеивается сильнее красной, поэтому жидкость со стороны источника света или сбоку кажется синей. Если же смотреть на просвет, она становится желтой или красной.

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, Л. Кардасевич,
И. Клумова, Т. Петрова, С. Табачников,
В. Тихомирова

Номер оформили:
М. Дубах, С. Иванов, Д. Крымов,
Н. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров,
И. Смирнова, Л. Тишков,
П. Чернуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. Иванов
Художественный редактор Т. Макарова
Заведующая редакцией Л. Чернова
Корректор Н. Румянцева

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 21.12.89. Подписано к печати 12.02.90
Т-06718. Формат 70×100/16. Бумага офс. № 1
Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45
Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,93
Тираж 171 690 экз. Заказ 2885. Цена 45 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

ИСТОРИЧЕСКИЙ МАТЧ

Этот матч можно назвать историческим, можно — сенсационным. 22 октября 1989 года в Нью-Йорке по инициативе американской фирмы «Эй-джи-эс» состоялся шахматный поединок из двух партий между двумя чемпионами мира — Г. Каспаровым (среди людей) и «Дип сот» (среди компьютеров).

«Дип сот» — Г. Каспаров
Сицилианская защита

1. e4 c5 2. c3 e6 3. d4 d5. Сравнительно редкий вариант сицилианской защиты Каспаров сводит к французской защите. После 4. e5 с перестановкой ходов получалась система Нимцовича 1. e4 e6 2. d4 d5 3. e5 c5 4. c3, но «Дип сот» добровольно сходит с теоретической тропинки. **4. ed ed 5. Kf3 Cd6 6. Ce3.** Белые отказываются от размена на c5, создавая у противника классический «изолятор» d5.

6...c4 7. b3 cb 8. ab Ke7 9. Ka3 Kbc6 10. Kb5. Логичнее было закончить развитие и лишь затем решать, как поступать с этим конем. **10...Cb8 11. Cd3 Cf5.** Черные уже избавились от всех дебютных неудобств и теперь рассчитывают захватить инициативу.

12. c4 0—0 13. Лa4. Таким экстравагантным способом белые прикрывают поле b4 от появления на нем коня, но тот, кажется, туда и не собирался **13...Фd7 14. Кс3.** Наконец окольным путем конь компьютера занял человеческое место... **14...Сс7 15. С:f5 Ф:f5 16. Kh4 Фd7 17. 0—0 Лad8 18. Лe1.** Взяв под обстрел коня e7, белые косвенно защищают пешку d4. **18...Лfe8.** Все фигуры черных централизованы, и следующий ход машины вынужден. **19. c5 Ca5.** Начало стратегической операции, обеспечивающей черным заметный перевес. **20. Фd3 a6 21. h3 C:c3 22. Ф:c3 Kf5 23. K:f5 Ф:f5.** Интересно, как оценивала машина эту позицию. Черный конь явно превосходит слона, но учитывается ли этот позиционный фактор каким-нибудь числом, увеличивающим оценочную функцию для черных?

24. Лa2 Лe6 25. Лae2 Лde8 26. Фd2. Возможно 26. f3, 27. Kpf1 и 28. Cf2, стремясь к упрощениям. Но данная пешечная структура малопривлекательна для белых даже при размене всех тяжелых фигур.

26...f6 27. Фc3 h5 28. b4 Л8e7 29. Kph1 g5 30. Kpg1 g4 31. h4 Лe4 32. Фb2 Ka7 33. Фd2 Л4e6 34. Фc1 Kb5 35. Фd2 Ka3 36. Фd1 Kpf7 37. Фb3 Kc4 38. Kph2 Лe4 39. g3 Фf3 40. b5. Безуспешная попытка отвлечь силы черных на другой конец доски. **40...a5 41. c6 f5 42. cb.** Избегая красивого варианта: 42. b6 f4!! 43. c7 K:e3 44. Л:e3 Ф:f2+ 45. Kph1 Ф:e1+ 46. Л:e1 Л:e1+ 47. Kpg2 Л7e2×.

42...Л:b7 43. Kpg1 f4! 44. gf g3 45. Фd1 Лbe7 46. b6 gf 47. Л:f2 Ф:d1 48. Л:d1 Л:e3 49. Лg2 K:b6 50. Лg5 a4 51. Л:h5 a3 52. Лd2 Лe2. Белые сдались.

Г. Каспаров — «Дип сот»
Принятый ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. c4 dc 3. e4 Kc6 4. Kf3 Cg4 5. d5 Ke5 6. Kc3. В данной партии Каспаров применяет новинку уже на шестом ходу. **6...c6 7. Cf4 Kg6 8. Ce3 cd 9. ed Ke5 10. Фd4!** Белые заметно опередили соперника в развитии и теперь используют это обстоятельство для создания решающего перевеса. **10...K:f3+.** После 10...C:f3 11. Ф:e5 Cg4 12. C:c4 черные могут сгореть, не успев ввести в бой свои фигуры. **11. gf C:f3 12. C:c4!** Промежуточный ход (12...C:h1 13. Cb5+), позволяющий белым создать неотразимую атаку. **12...Фd6 13. Kb5 Фf6 14. Фc5 Фb6 15. Фa3 e6.** Рассчитав варианты, «Дип сот» наверняка обнаружил, что этот ход пешкой ведет к потере ферзя, но, видно, все остальные пути привели машину к еще меньшему значению оценочной функции.

16. Kc7+ Ф:c7 17. Cb5+ Фc6 18. C:c6+bc 19. Cc5 C:c5 20. Ф:f3 Cb4+ 21. Kpe2 cd 22. Фg4 Ce7 23. Лhc1. Материальное соотношение сил вполне терпимо для черных, но белые ладьи по единственной открытой линии «c» быстро проникают в неприятельский лагерь, что и решает дело. **23...Kpf8 24. Лc7 Cd6 25. Лb7 Kf6 26. Фa4 a5 27. Лc1 h6 28. Лc6 Ke8 29. b4! C:h2 30. ba Kpg8 31. Фb4 Cd6.** На пару ходов затягивает сопротивление, грозило 32. Фe7.

32. Л:d6 K:d6 33. Лb8+ Л:b8 34. Ф:b8+Kph7 35. Ф:d6 Лc8 36. a4 Лc4 37. Фd7. Черные сдались.

Если в первой партии Каспаров переиграл машину в позиционной борьбе, то во второй продемонстрировал явное превосходство в тактике.

В беседе с журналистами Г. Каспаров заметил, что его партнер не делал грубых ошибок, хотя и часто избирал не лучшие продолжения. Рейтинг машины, по его мнению, колеблется в пределах 2450—2500, то есть соответствует уровню среднего гроссмейстера.

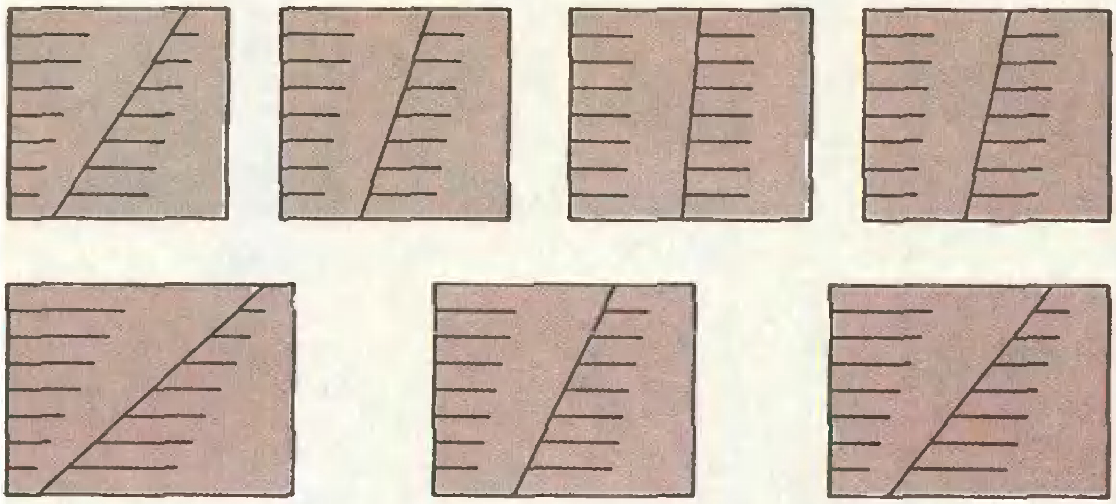
Есть ли у машины шансы когда-нибудь справиться с чемпионом мира? Вот что сказал по этому поводу Гарри Каспаров после матча: «Шахматы шире, чем простой расчет, шире даже логики. Они требуют фантазии и интуиции. Это не только передвижение фигур, это — психология, это — драка, это — борьба. Не могу представить себе, что может существовать нечто более сильное, чем человеческий ум. Если компьютер сможет превзойти в шахматах лучшего из лучших, это будет означать, что ЭВМ в состоянии сочинять самую лучшую музыку, писать самые лучшие книги. Не могу в это поверить. Если будет создан компьютер с рейтингом 2800, то есть равным моему, я сам сочту своим долгом вызвать его на матч, чтобы защитить человеческую расу».

Е. Гик

45 коп.

Индекс 70465

В прошлом году мы познакомили читателей с несколькими моделями многогранников, которые изготавливались по классическим законам японского искусства оригами — т. е. из одного квадратного листа бумаги без ножниц и клея (см. 4-ю с. обложки «Кванта» №№ 7, 8, 9). Если ослабить эти ограничения, то можно моделировать гораздо более замысловатые фигуры и даже кривые поверхности. На этой странице показано, как сделать модель «гиперболического параболоида», общий вид которой представлен на 1-й с. обложки. Это седловидная поверхность, образуемая, как ни удивительно, двумя пересекающимися семействами прямых. Более того, решетка образующих прямых подвижна, причем можно шарнирно скрепить прямые друг с другом в их точках пересечения так, чтобы в этих точках они могли вращаться, но не скользить, и все равно решетка останется изгибаемой. Это замечатель-



ное свойство хорошо видно на нашей модели: ее можно складывать и расправлять, а если вклеить ее внутрь картонной обложки, получится красивая раскладная игрушка. Подробнее о гиперболическом параболоиде можно прочитать в книге Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена «Наглядная геометрия» (М., «Наука», 1981, с. 23). Наша модель собирается из 7 пар прямоугольных трапеций 4-х видов с надрезами, параллельными основаниям; у двух парных трапеций надрезаются противоположные стороны. Можно придумать множество подобных складных конструкций, и мы объявляем конкурс среди читателей на самую интересную. Победители получат призы «Кванта» и оригинальные головоломки. Работы присылайте до 1 августа 1990 г. На конверте напишите: «Складная конструкция».

Д. К.